Лекция 5. «Колебания»

Гармонические колебания. Векторная диаграмма. Сложение гармонических колебаний одного направления равных и близких частот. Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний равных и кратных частот. Свободные незатухающие колебания. Энергия и импульс гармонического осциллятора. Фазовая траектория. Физический маятник. Квазиупругая сила.

Положение равновесия и квазиупругая сила.

Рассмотрим одномерное движение тела под действием консервативной силы вдоль оси X. Для потенциальной энергии тела вблизи некоторой точки x_0 можно записать выражение

$$W(x) = W_0 + \left.\frac{dW}{dx}\right|_{x_0} \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2W}{dx^2}\right|_{x_0} \cdot (x - x_0)^2 + \ldots$$

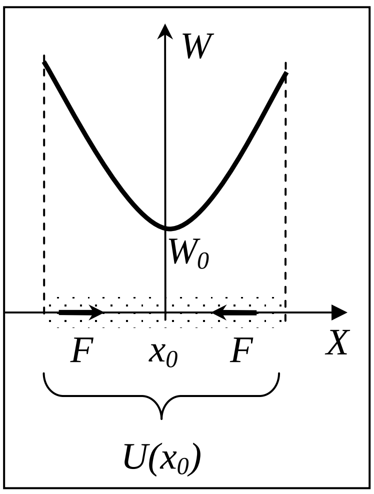
Потенциальная энергия и вектор консервативной силы связаны соотношением

$$\vec{F} = -gradW$$

откуда для проекции силы на ось X $F_x = -\frac{dW}{dx}$, т.е.

$$F_x = -\frac{\partial W}{\partial x} = -\left(\left.\frac{dW}{dx}\right|_{x_0} + \left.\frac{d^2W}{dx^2}\right|_{x_0} \cdot (x - x_0) + \ldots\right).$$

Далее будем предполагать, что точка x_0 является положением равновесия, поэто-



му должно выполняться условие $F_x = -\left.\frac{dW}{dx}\right|_{x_0} = 0$, тогда для изменения потенциальной энергии вблизи точки x_0

$$\Delta W = W(x) - W_0 \approx \frac{1}{2}\left.\frac{d^2W}{dx^2}\right|_{x_0} \cdot (x - x_0)^2$$

и для проекции силы $F_x \approx -\left.\frac{d^2W}{dx^2}\right|_{x_0} \cdot (x - x_0)$.

Рассмотрим случай, когда в точке x_0 наблюдается локальный минимум потенциальной энергии. Тогда $\frac{d^2W}{dx^2} > 0$ и существует некоторая окрестность точки U(x_0), для которой выполняется $W(x) > W_0$ и $F_x > 0$ при $x < x_0$, $F_x < 0$ при $x > x_0$, то есть в этой окрестности вектор силы, действующей на тело, будет направлен к точке x_0. А это значит, что при малых смещения тела из положения равновесия, сила будет стремиться вернуть тело обратно. Такое положение равновесия называется *устойчивым*.

Положение равновесия называется *неустойчивым*, если при малом отклонении от этого положения возникает сила, стремящаяся увести тело от положения равновесия. Очевидно, в этом случае в точке наблюдается локальный максимум потенциальной энергии $\frac{d^2W}{dx^2} < 0$.

В случае, когда $\frac{d^2W}{dx^2} = 0$ требуется дополнительное исследование. Итак, выражение для консервативной силы вблизи положения устойчивого равновесия можно записать в векторной форме $\vec{F} = -k_0 \Delta\vec{x}$, а величину потенциальной энергии $W = \frac{1}{2}k_0 \Delta x^2$ + const, где $k_0 = \left(\frac{d^2W}{dx^2}\right)_{x=x_0}$. Такая форма записи для консервативной силы вблизи точки равновесия называется *квазиупругой силой*.

Запишем второй закон Ньютона для тела, движущегося под действием квазиупругой силы вблизи точки устойчивого положения равновесия

$$ma_x = F_x, \text{ где } F_x = -k_0(x - x_0).$$

Введем ось X так, чтобы $x_0 = 0$, тогда уравнение движения примет вид $ma_x = -k_0 x$. С учетом зависимости $a_x = \ddot{x}$ это уравнение примет вид $m\ddot{x} = -k_0 x$ или

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

где $\omega_0^2 = \frac{k_0}{m} > 0$. Это *линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка*.

Решением этого уравнения являются гармонические функциями от времени t

$$x = A\cos(\omega_0 t + \alpha) \text{ или } x = A\sin(\omega_0 t + \beta),$$

описывающие смещение от равновесного значения $x_0 = 0$.

Замечание. Обе формы записи равноправны. Например, одна переходит в другую при $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$.

Так как гармонические функции синус и конус имеют минимальный период 2π, то параметры процесса будут повторяться через минимальный промежуток времени *T*, называемый *периодом колебаний*: $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Учитывая, что величина $\nu = \frac{1}{T}$ называется *частотой колебаний* (единица измерения Гц - Герц), то величину $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$ называют *круговой* или *циклической частотой* колебаний (единица измерения $с^{-1}$.)

Величина А – амплитуда колебаний - это модуль максимального смещения. По определению А>0 – всегда положительная величина. Аргумент гармонической функции $(\omega t + \alpha)$ называется *фазой* колебания, а величина α называется *начальной фазой* колебаний - это фаза колебаний в момент времени *t*=0, который обычно называют *начальным моментом времени*.

Таким образом, уравнение

$$\ddot{x} + \omega_0^{\ 2} x = 0$$

описывает *колебательный процесс*, параметры которого изменяются периодически с течением времени. В этом колебательном процессе с течением времени сохраняется величина механической энергии $W_{MEX} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{k_0 x^2}{2} = const$. Действительно:

$$\frac{dW_{MEX}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{k_0 x^2}{2}\right) = 2m\frac{\dot{x}}{2}\ddot{x} + 2k_0\frac{x}{2}\dot{x} = m\dot{x}\left(\ddot{x} + \omega_0^{\ 2} x\right) = 0.$$

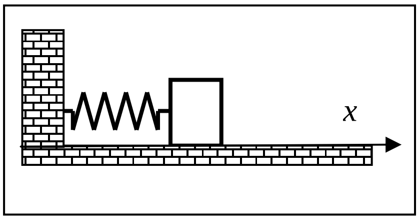
Этот колебательный процесс принято называть *свободными незатухающими колебаниями*.

Свободные незатухающие колебания.

Колебания – движения или состояния, параметры которых повторяются во времени. Колебания в той или иной мере встречаются во всех явлениях природы: от пульсации излучения звезд, движения планет до внутриклеточных процессов или колебаний атомов и молекул, колебаний полей.

В физике особо выделяют механические и электромагнитные колебания (и их комбинации).

Моделью для изучения механических колебаний является *осциллятор* – материальная точка или система, совершающая колебательное периодическое движение около положения устойчивого равновесия. (Более того, термин осциллятор применим к любой системе, если описывающие ее величины периодически меняются во времени.) Простейшие примеры осцилляторов – грузик на пружине, маятник.



Пример. *Груз массы m на невесомой пружине жесткости k движется по гладкой горизонтальной поверхности (пружинный маятник). Найти период его колебаний. Сопротивлением воздуха пренебречь.*

Решение. Запишем уравнение его движения в проекции на горизонтальное направление X

$$ma = -F_{УПР} = -k \cdot x \text{ или } a = -\frac{k}{m}x.$$

где x – величина растяжения пружины. Т.к. $a = \ddot{x}$, то получаем уравнение $\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$.

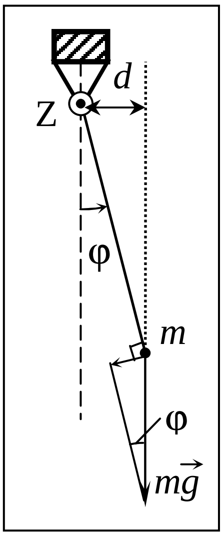
Здесь $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ и период колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Механическая энергия груза на пружине $W_{МЕХ} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$.♣

Пример. *Найдем период колебаний математического маятника - материальной точки массы m, подвешенной на невесомой нерастяжимой нити длины l.*

Решение. Рассмотрим движение маятника в тот момент, когда он поднимается. Отклонение нити от вертикали зададим угловой координатой φ. При этом если угол φ увеличивается (против часовой стрелки), то касательное ускорение точки направлено против направления движения. Поэтому уравнение движения имеет вид:

$$ma_\tau = -mg \cdot sin\varphi.$$



Вблизи положения равновесия проекция сила тяжести должна быть представлена как квазиупругая сила. Если выполняется *условие малости колебаний*, то $sin\varphi \approx \varphi$, поэтому длина дуги окружности $x = l\varphi$, следовательно, проекция силы тяжести $mg \cdot sin\varphi \approx \frac{mg}{l} \cdot l\varphi = \frac{mg}{l} \cdot x$. Поэтому коэффициент в выражении для квазиупругой силы $k_0 = \frac{mg}{l}$. Касательное ускорение связано с угловым ускорением соотношением $a_\tau = \varepsilon \cdot l$ (где $\varepsilon = \ddot{\varphi}$), поэтому, после сокращения массы *m* получим: $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \cdot \varphi = 0$.

С учетом выражения для циклической частоты $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ период колебаний имеет вид $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Механическая энергия математического маятника

$$W_{MEX} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{k_0 x^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{mg}{l}\frac{x^2}{2}.$$

При движении по окружности $x = l\varphi$, $\dot{x} = l\dot{\varphi}$, поэтому

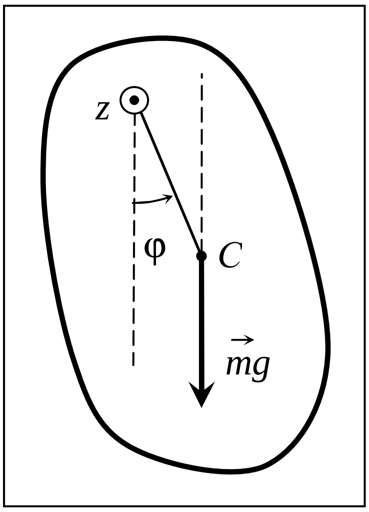
$$W_{MEX} = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{mg}{l}\frac{l^2\varphi^2}{2} = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{mgl\varphi^2}{2}.$$

Уравнение колебаний для математического маятника можно вывести, используя уравнение динамики вращательного движения.

Проведем ось Z через точку подвеса перпендикулярно плоскости колебаний маятника, тогда момент инерции материальной точки относительно оси Z: $I_z = ml^2$, момент импульса точки $\vec{L} = I_z\vec{\dot{\varphi}}$ направлен вдоль оси Z, а момент силы тяжести $M_z = -mgl\,sin\varphi \approx -mgl\varphi$ (плечо силы тяжести относительно оси $d = l\,sin\varphi \approx l\varphi$) направлен против оси Z.

Закон вращательного движения точки вокруг оси Z: $\frac{dL_z}{dt} = M_z$ или

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\varphi\,.♣$$



Пример. Найдем период колебаний *физического маятника* - тела массы *m*, которое может совершать колебания под действием силы тяжести (инерции) вокруг горизонтальной оси, не проходящей через центр масс тела. Сопротивлением воздуха пренебрегаем.

Решение. Проведем из центра масс тела С перпендикуляр к оси вращения z. Пусть длина этого перпендикуляра равна *l*.

Положение тела зададим углом отклонения от вертикали этого перпендикуляра φ. При этом если угол φ увеличивается (тело поворачивается против часовой стрелки), то вектор момента импульса $\vec{L}$ направлен вдоль горизонтальной оси z на нас. Момент внешней силы тяжести относительно оси z направлен от нас. Рассмотрим проекции на ось z: $L_z = I_z\omega = I_z\dot{\varphi}$, $M_z(m\vec{g}) = -mgl\,sin\varphi$.

Уравнение вращения вокруг оси z: $\frac{dL_z}{dt} = M_z^{\,ВНЕШ}$ или $I_z\ddot{\varphi} = -mgl\,sin\varphi$

Если выполняется условие малости колебаний: $sin\varphi \approx \varphi$, то уравнение колебаний примет вид

$$\ddot{\varphi} = -\frac{mgl}{I_z}\varphi\,.$$

С учетом выражения для циклической частоты $\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I_z}}$ получаем выражение для периода колебаний физического маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgl}}$.

Приведенной длиной физического маятника называется длина математического маятника с таким же периодом

$$T_{МАТ}=T_{ФИЗ},\ 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgl}}=2\pi\sqrt{\frac{l_{ПР}}{g}},\ l_{ПР}=\frac{I_z}{ml}.\clubsuit$$

Замечание. Как показано в последних двух примерах, уравнения колебаний можно получить, вводя обобщенную координату - угол и обобщенную квазиупругую силу – момент силы тяжести.

Математические сведения

Среднее значение (по времени) некоторой величины $u(t)$ за интервал времени (t_1, t_2) – это такое постоянное значение $\langle u\rangle$, для которого выполняется равенство $\int_{t_1}^{t_2}u(t)\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\langle u\rangle\,dt=\langle u\rangle\cdot(t_2-t_1)$, поэтому $\langle u\rangle=\frac{1}{(t_2-t_1)}\int_{t_1}^{t_2}u(t)\,dt$. Если рассматривать временной интервал $(0;+\infty)$, то в этом случае $\langle u\rangle=\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{1}{t}\int_0^t u(t)\,dt\right\}$.

Примеры

1. Пусть A – некоторая константа. Тогда $\langle A\rangle=\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{1}{t}\int_0^t Adt\right\}=\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{1}{t}At\right\}=A$.

2. $\langle sin(\omega t+\alpha)\rangle=\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{1}{t}\int_0^t sin(\omega t+\alpha)\,dt\right\}=-\frac{1}{\omega}\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{1}{t}cos(\omega t+\alpha)\Big|_0^t\right\}=0$

(так $-1\le cos\,\varphi\le -1$ для любых φ)

$$\langle cos^2(\omega t+\alpha)\rangle=\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{1}{t}\int_0^t cos^2(\omega t+\alpha)\,dt\right\}=\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{1}{t}\int_0^t\frac{1+cos(2\omega t+2\alpha)}{2}dt\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{1}{t}\left(t+\frac{1}{2\omega}sin(2\omega t+2\alpha)\right)\Bigg|_0^t\right\}=\frac{1}{2}$$

Аналогично $\langle cos(\omega t+\alpha)\rangle=0$, $\langle sin^2(\omega t+\alpha)\rangle=\frac{1}{2}$.

Энергия и импульс гармонического осциллятора

Пусть задан закон движения осциллятора $x=Acos(\omega t+\alpha)$. Так как колебания незатухающие, то они продолжаются бесконечно долго, поэтому средние значения надо искать на бесконечном интервале $(0;+\infty)$.

1) Среднее значение проекции импульса для колебательного движения

$$p_x=m\mathrm{v}_x=m\dot{x}=-m\omega Asin(\omega t+\alpha),\text{ тогда }\langle p_x\rangle=-m\omega A\langle sin(\omega t+\alpha)\rangle=0.$$

2) Среднее значение кинетической энергии $W_K = \frac{m\text{v}_x^2}{2} = \frac{p_x^2}{2m} = \frac{m}{2}\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \alpha)$

$\langle W_K \rangle = \frac{m\omega^2 A^2}{4}$.

3) Среднее значение потенциальной энергии $W_П = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2}\cos^2(\omega t + \alpha)$

$\langle W_П \rangle = \frac{kA^2}{4}$.

С учетом соотношения $\omega^2 = \frac{k}{m}$ получаем, что $\langle W_K \rangle = \langle W_П \rangle = \frac{kA^2}{4}$.

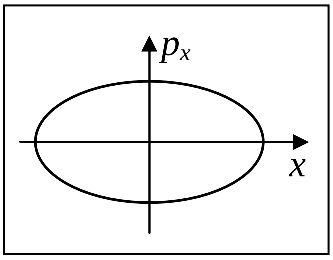
3) Найдём среднее значение механической энергии осциллятора

$$\langle W_{МЕХ} \rangle = \langle W_K + W_П \rangle = \langle W_K \rangle + \langle W_П \rangle = \frac{kA^2}{2}.$$

Как и следовало ожидать, полная механическая энергия осциллятора остается постоянной.

Фазовая плоскость.

Фазовой плоскостью называется двумерное пространство, координатами в котором является координата точки и проекция импульса (соответственно, обобщенная координата и обобщенный импульс).



Для пружинного маятника из закона сохранения энергии

$$W_{МЕХ} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{p_x^{\ 2}}{2m} + \frac{kx^2}{2} = const$$

следует, что *фазовая траектория* точки, совершающей свободные незатухающие колебания – это эллипс

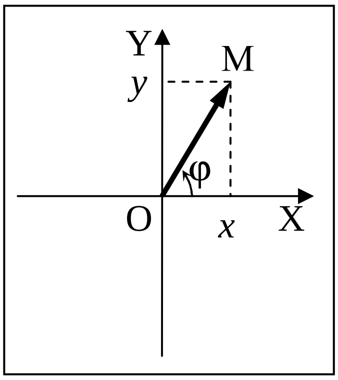
$$\frac{p_x^{\ 2}}{2m} + \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2}, \quad \left(\frac{p_x}{\sqrt{mk}A}\right)^2 + \left(\frac{x}{A}\right)^2 = 1,$$

главные полуоси которого $a = \sqrt{mk}A = m\omega A = m\text{v}_{max} = p_{max}$, $b = A$.

Замечание. В случае если система состоит из N осцилляторов, то фазовое пространство имеет размерность $2N$.

Векторная диаграмма.

Рассмотрим радиус-вектор точки М, вращающейся вокруг начала координат с постоянной угловой скоростью ω. Угол между радиус-вектором и осью X меня-



ется с течением времени по закону $\varphi = \omega t + \varphi_0$, где φ_0 – его начальное значение. Пусть длина радиус-вектора $|OM|$ =A. Координаты точки M:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0),\ y = A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

описывают колебания осцилляторов вдоль осей X и Y.

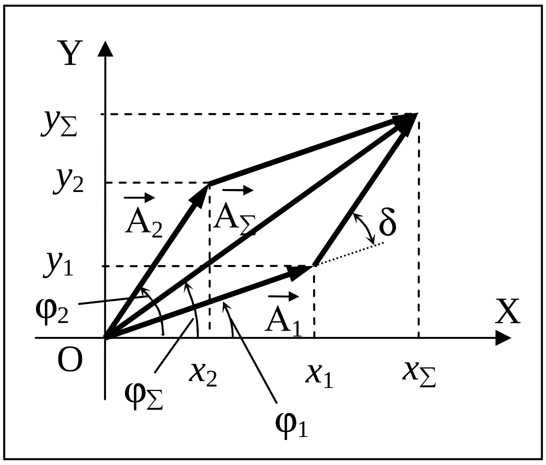
Данная форма представления колебаний называется амплитудной (векторной) диаграммой.

Рассмотрим сложение двух колебаний одного направления: пусть два осциллятора совершают колебания вдоль оси X с циклическими частотами ω_1 и ω_2

$$x_1 = A_1\cos(\omega_1 t + \alpha_1) \text{ и } x_2 = A_2\cos(\omega_2 t + \alpha_2).$$

Зададим эти колебания на векторной диаграмме с помощью векторов.

1-е колебание задаётся вектором $\vec{A}_1$, который вращается вокруг начала координат с постоянной угловой скоростью ω_1, угол вращения меняется по закону $\varphi_1 = \omega_1 t + \alpha_1$.



2-е колебание задаётся вектором $\vec{A}_2$, соответственно, угол $\varphi_2 = \omega_2 t + \alpha_2$.

Тогда результирующему колебанию $x_\Sigma = x_1 + x_2$ сопоставим вектор $\vec{A}_\Sigma = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ с фазой $\varphi_\Sigma = \omega_\Sigma t + \alpha_\Sigma$

По теореме косинусов

$$A_\Sigma^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos(\pi - \delta)$$

Учтем, что $\cos(\pi - \delta) = -\cos\delta$,

$$\delta = \varphi_2 - \varphi_1 = (\omega_2 - \omega_1)t + \alpha_2 - \alpha_1, \text{ тогда}$$

$$A_\Sigma^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos((\omega_2 - \omega_1)t + \alpha_2 - \alpha_1)$$

$$tg\varphi_\Sigma = \frac{y_\Sigma}{x_\Sigma} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} \text{ или } tg(\omega_\Sigma t + \alpha_\Sigma) = \frac{A_1\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2\sin(\omega_2 t + \alpha_2)}{A_1\cos(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \alpha_2)}.$$

Соответственно, $tg(\alpha_\Sigma) = \dfrac{A_1\sin(\alpha_1) + A_2\sin(\alpha_2)}{A_1\cos(\alpha_1) + A_2\cos(\alpha_2)}$.

Остановимся подробнее на двух частных случаях.

1) Пусть $A_1 = A_2 := A$, $\omega_1 = \omega_2 := \omega$. Тогда $A_\Sigma^2 = 2A^2 + 2A^2 cos(\alpha_2 - \alpha_1) = 2A^2 (1 + cos(\alpha_2 - \alpha_1))$.

Амплитуда результирующего колебания в этом случае не зависит от времени.

Если разность начальных фаз колебаний $\alpha_2 - \alpha_1 = 2\pi n$, где n – целое число, то наблюдается усиление колебаний $A_\Sigma = 2A$.

Если разность начальных фаз колебаний $\alpha_2 - \alpha_1 = \pi + 2\pi n$, где n – целое число, то колебания гасят друг друга $A_\Sigma = 0$.

Для вывода формулы результирующего колебания воспользуемся соотношением

$cos\beta_1 + cos\beta_2 = 2cos\left(\frac{\beta_2 - \beta_1}{2}\right)cos\left(\frac{\beta_2 + \beta_1}{2}\right)$, поэтому, учитывая четность косинуса:

$$x_\Sigma = x_1 + x_2 = 2A cos\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right)cos\left(\omega t + \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}\right)$$

Амплитудой должно быть выражение, не зависящее от времени, но амплитуда не может быть отрицательной величиной, следовательно

$$A_\Sigma = 2A\left|cos\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right)\right|,$$

Тогда

$$x_\Sigma = 2A\left|cos\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right)\right|cos\left(\omega t + \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} + \theta\right).$$

Если $cos\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right) > 0$, то $\theta = 0$, если $cos\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right) < 0$ то $\theta = \pi$.

2) Рассмотрим случай, когда амплитуды одинаковые $A_1 = A_2 := A$, но частоты отличаются на небольшую величину $\omega_1 = \omega$, $\omega_2 = \omega + \Delta\omega$, $\Delta\omega << \omega$. Для упрощения примем, что $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = 0$. Аналогично предыдущему случаю, получаем

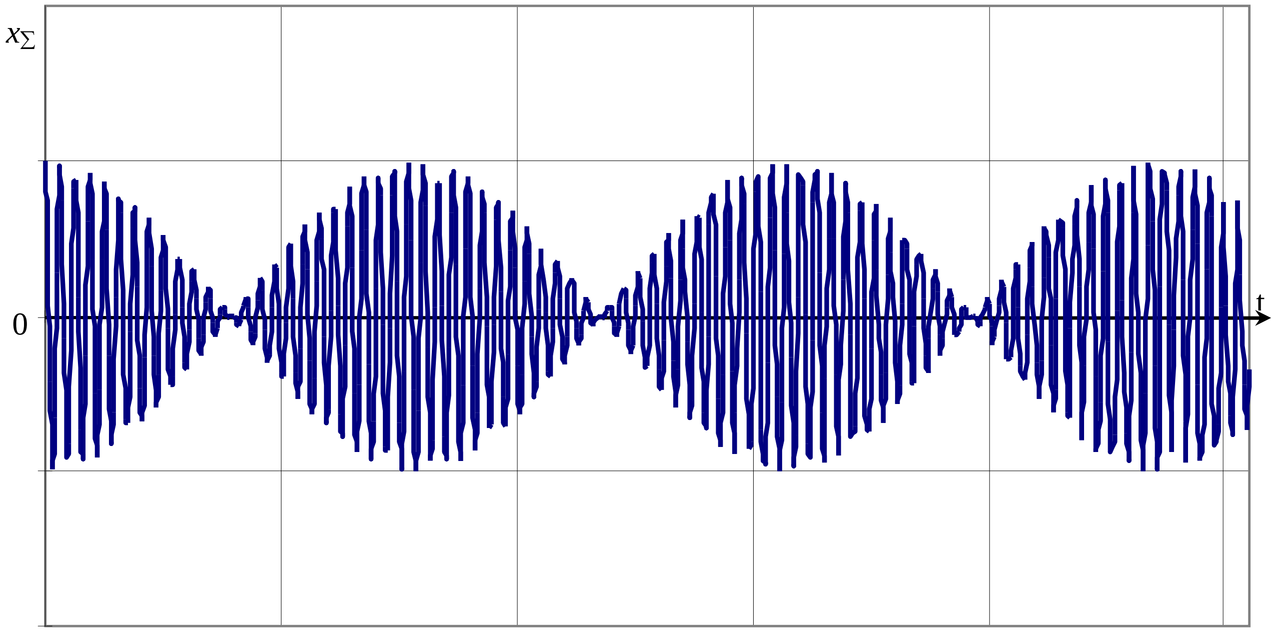
$$x_\Sigma = x_1 + x_2 = 2A cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)cos\left(\omega t + \frac{\Delta\omega}{2}t\right).$$

Пренебрегая в выражении для фазы второго сомножителя величиной $\Delta\omega$ по сравнению с ω, получаем:

$$x_\Sigma = 2A\left|\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\right|\cos(\omega t+\theta).$$

Если $\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)>0$, то $\theta=0$, но если $\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)<0$ то $\theta=\pi$.

Таким образом, при сложении колебаний близких частот возникает перио-



дическое изменение амплитуды и скачкообразное изменение фазы результирующего колебания – явление, которое называется *биением*.

Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний равных и кратных частот

Рассмотрим траекторию точки, совершающей колебания одновременно по двум взаимно перпендикулярным направлениям

$$x = A_x\sin(\omega_x t),\ \ y = A_y\sin(\omega_y t+\varphi).$$

1) Пусть частоты колебаний одинаковые $\omega_x=\omega_y:=\omega$.

Получим уравнение траектории

$$\frac{x}{A_x}=\sin(\omega t),\ \frac{y}{A_y}=\sin(\omega t+\varphi)=\sin(\omega t)\cos\varphi+\cos(\omega t)\sin\varphi$$

$$\frac{y}{A_y}=\frac{x}{A_x}\cos\varphi+\sqrt{1-\left(\frac{x}{A_x}\right)^2}\sin\varphi,\ \left(\frac{y}{A_y}-\frac{x}{A_x}\cos\varphi\right)^2=\left(1-\left(\frac{x}{A_x}\right)^2\right)\sin^2\varphi$$

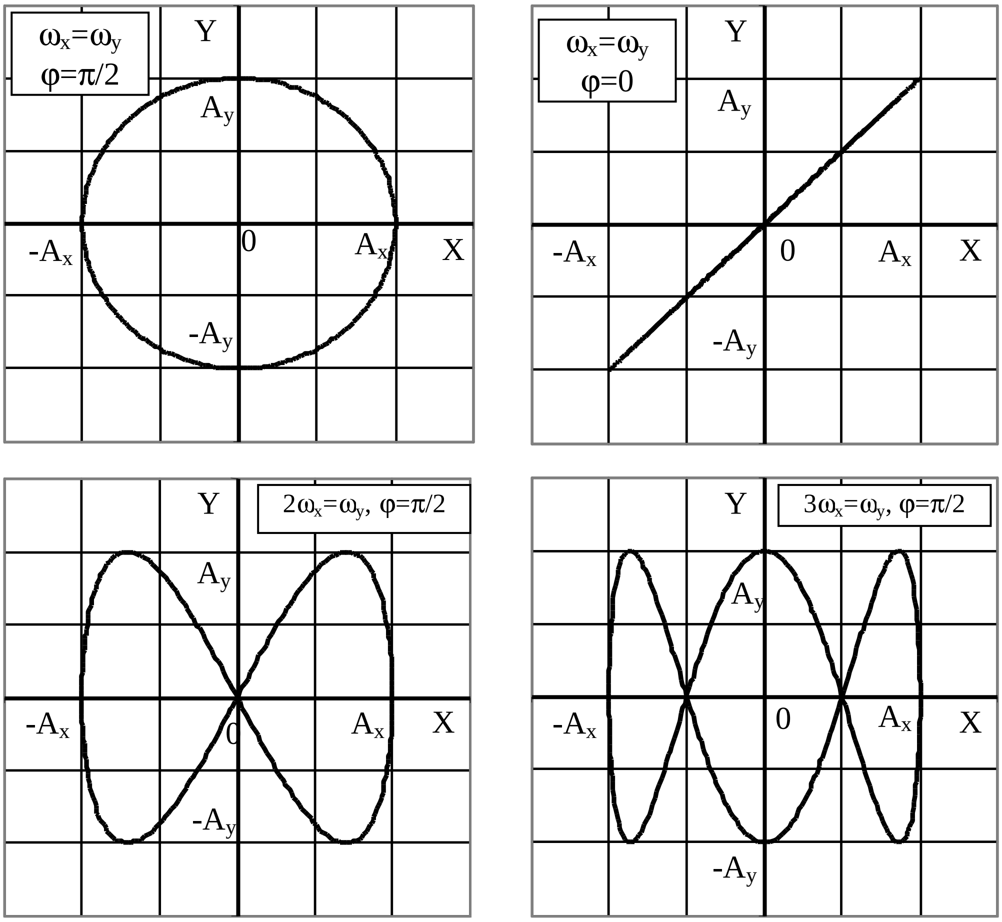
$$\left(\frac{y}{A_y}\right)^2 - 2\frac{x}{A_x}\frac{y}{A_y}\cos\varphi + \left(\frac{x}{A_x}\right)^2 = \sin^2\varphi\,.$$

Это уравнение линии *второго порядка на плоскости*.

Если $\varphi = 0$ то получаем отрезок прямой.

Если $\varphi = \pm\dfrac{\pi}{2}$, то получаем эллипс $\left(\dfrac{y}{A_y}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{A_x}\right)^2 = 1$.

2) Фигуры для некоторых других соотношений частот и разности фаз показаны на рисунках.



Соотношение частот колебаний по фигуре можно определить из равенства

$$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{n_y}{n_x},$$

где n – количество пересечений фигуры и прямой, параллельной соответствующей оси.

Траектория точки, совершающей одновременно два взаимно перпендикулярных колебания, при рациональном отношении частот колебаний называется фигурой Лиссажу. Условие рационального частот отношения означает, что отношение частот можно записать в виде рационального числа. В этом случае траектория является замкнутой. Если отношение частот не является рациональным числом, то траектория - незамкнутая линия.