Лекция 4. Закон сохранения энергии в механике.

Работа и кинетическая энергия. Консервативные силы. Работа в потенциальном поле. Потенциальная энергия тяготения и упругих деформаций. Связь между потенциальной энергией и силой. Закон сохранения энергии.

Рассмотрим движение материальной точки в некоторой инерциальной системе отсчета. Второй закон Ньютона имеет вид

$$m\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt}=\vec{F}\ .$$

Вектор скорости точки $\vec{\mathrm{v}}$ направлен по касательной к траектории. Поэтому вектор малого перемещения точки $d\vec{r}=\vec{\mathrm{v}}\cdot dt$ тоже направлен по касательной к траектории (dt – малый промежуток времени). Умножаем *скалярно* уравнение движения на вектор малого перемещения и интегрируем вдоль пути

$$\int\limits_{\text{Путь}}\left(m\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt},d\vec{r}\right)=\int\limits_{\text{Путь}}\left(\vec{F},d\vec{r}\right).$$

Преобразования левой части равенства.

$$\left(m\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt},d\vec{r}\right)=\left(m\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt},\vec{\mathrm{v}}dt\right)=m\left(\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt},\vec{\mathrm{v}}\right)dt=m\frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}(\vec{\mathrm{v}},\vec{\mathrm{v}})\right]dt=d\left(\frac{m\mathrm{v}^2}{2}\right)$$

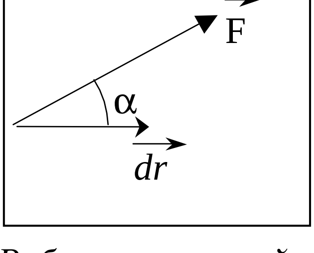
$$\int\limits_{\text{Путь}}\left(m\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt},d\vec{r}\right)=\int\limits_{\text{Путь}}d\left(\frac{m\mathrm{v}^2}{2}\right)=\left(\frac{m\mathrm{v}^2}{2}\right)_{\text{КОНЕЧ}}-\left(\frac{m\mathrm{v}^2}{2}\right)_{\text{НАЧ}}.$$

Кинетической энергией материальной точки массы m, которая движется скоростью v, называется величина $\mathrm{W}_{\text{КИН}}=\dfrac{m\cdot\mathrm{v}^2}{2}$.

Единицы измерения кинетической энергии – Дж (Джоуль). Иногда кинетическую энергию полезно выразить через импульс тела ($\vec{\mathrm{p}}=\mathrm{m}\vec{\mathrm{v}}$): $\mathrm{W}_{\text{КИН}}=\dfrac{m\cdot\mathrm{v}^2}{2}=\dfrac{p^2}{2m}$.

Замечание. Кинетическая энергия зависит от системы отсчета. Например, в сопутствующей системе отсчета кинетическая энергия равна нулю.

Преобразование правой части равенства.



Работой <u>постоянной</u> силы $\vec{\mathrm{F}}$, действующей на материальную точку, при малом перемещении $\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}$ этой точки называется произведение

$$\mathrm{A}=\left(\vec{\mathrm{F}},\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}\right)=\left|\vec{\mathrm{F}}\right|\cdot\left|\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}\right|\cdot cos\alpha,$$

где α - угол между вектором силы и вектором перемещения. Единицы измерения работы – Дж (Джоуль).

Работу величиной в один Джоуль совершает постоянная сила в 1 *Ньютон, совпадающая по направлению с перемещением длиной* 1 *метр.*

Работа *переменной* силы

$$A=\int\limits_{\text{Путь}}\left(\vec{F},d\vec{r}\right)=\int\limits_{\text{Путь}}\left(F_xdx+F_ydy+F_zdz\right),$$

где $d\vec{r}=\left(dx,dy,dz\right)$ - малый вектор перемещения.

Итог

Приравняем правую и левую части равенства

$$\int_{Путь}\left(m\frac{d\vec{v}}{dt},d\vec{r}\right)=\int_{Путь}\left(\vec{F},d\vec{r}\right)$$

Или, с учётом приведённых преобразований: $W_{КИН}^{КОНЕЧ}-W_{КИН}^{НАЧ}=A$.

Таким образом была доказана теорема об изменении кинетической энергии. *Изменение кинетической энергии материальной точки на участке пути равно работе действующих на нее сил на этом участке.*

Мощность силы.

Средней мощностью силы F называется отношение работы этой силы к интервалу времени, за который была совершения эта работа

$$\mathrm{P}_{CP}=\frac{\mathrm{A}}{\Delta \mathrm{t}}.$$

Единицы измерения мощности Вт (Ватт), мощность силы в 1 Вт соответствует работе в 1 Дж, совершаемой силой за 1 секунду.

Мгновенной мощностью силы называется мощность этой силы за малый промежуток времени

$$P=\frac{\left(\vec{F},d\vec{r}\right)}{dt}=\left(\vec{F},\vec{v}\right),$$

где $\vec{v}$ - вектор скорости точки.

Следствие. Если в каждый момент времени $\vec{F}\perp\vec{v}$, то работа данной силы равна нулю.

Кинетическая энергия твердого тела,
вращающегося вокруг неподвижной оси.

В случае вращения твёрдого тела величина скорости вращения любой точки вокруг оси равна $v_i=\omega r_{i\perp}$, где $r_{i\perp}$ - расстояние от этой точки до оси вращения, поэтому суммарная кинетическая энергия всех точек

$$W_{КИН}^{ВРАЩ}=\sum_i\frac{m_i v_i^2}{2}=\sum_i\frac{m_i\omega^2 r_{i\perp}^2}{2}=\frac{\omega^2}{2}\sum_i m_i r_{i\perp}^2=\frac{\omega^2}{2}I_z,$$

где I_z - момент инерции тела относительно оси вращения.

Рассмотрим уравнение динамики вращательного движения твердого тела вокруг оси

$$I_z\frac{d\omega}{dt}=M_z.$$

При малом угле поворота $d\varphi=\omega dt$ отсюда следует

$$I_z\frac{d\omega}{dt}d\varphi=M_z d\varphi$$

Преобразования левой части равенства

$$I_z\frac{d\omega}{dt}\omega dt=I_z\omega d\omega=d\left(\frac{I_z\omega^2}{2}\right).$$

Если рассмотреть поворот на конечный угол $\Delta\varphi$:

$$\int_{\Delta\varphi} I_z \frac{d\omega}{dt} d\varphi = \int_{\Delta\varphi} M_z d\varphi,$$

откуда

$$\left(\frac{I_z\omega^2}{2}\right)_{КОН} - \left(\frac{I_z\omega^2}{2}\right)_{НАЧ} = \int_{\Delta\varphi} M_z d\varphi$$

Так как слева стоит выражение для изменения кинетической энергии вращающегося тела, то справа стоит выражение для *работы сил при повороте тела*. Таким образом, если известен момент сил M_z относительно оси вращения z, то работа этих сил при повороте тела вокруг оси вычисляется по формуле

$$A = \int_{\Delta\varphi} M_z d\varphi.$$

А мгновенная мощность сил

$$P = M_z\omega.$$

Замечание. Если малый угол поворота задать в векторном виде $d\vec{\varphi} = \vec{\omega}\cdot dt$, то выражение для мощности и работы при вращательном движении можно записать следующим образом

$$A = \int_{\Delta\varphi} \left(\vec{M}, d\vec{\varphi}\right),\ P = \left(\vec{M}, \vec{\omega}\right).$$

КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТЕЛА (СИСТЕМЫ ТОЧЕК).

Рассмотрим систему движущихся точек. Кинетическая энергия системы - это суммарная энергия всех точек:

$$W_\Sigma = \sum_i W_i = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i\left(\vec{v}_i, \vec{v}_i\right)}{2}.$$

Скорость каждой точки можно представить в виде $\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{v}_{i\_OTH}$,

где $\vec{v}_C$ - скорость центра масс системы (одинаковая для всех точек системы), $\vec{v}_{i\_OTH}$ - относительная скорость точки (в системе отсчета, где центр масс покоится).

$$W_\Sigma = \sum_i \frac{m_i\left(\vec{v}_C + \vec{v}_{i\_OTH}, \vec{v}_C + \vec{v}_{i\_OTH}\right)}{2} = \sum_i \frac{m_i\left(\vec{v}_C, \vec{v}_C\right) + 2m_i\left(\vec{v}_C, \vec{v}_{i\_OTH}\right) + m_i\left(\vec{v}_{i\_OTH}, \vec{v}_{i\_OTH}\right)}{2}.$$

В правой части равенства

$\sum_i \frac{m_i\left(\vec{v}_C, \vec{v}_C\right)}{2} = \frac{\left(\vec{v}_C, \vec{v}_C\right)}{2}\sum_i m_i = \frac{m v_C^2}{2}$ - кинетическая энергия центра масс системы;

$\sum_i \frac{m_i\left(\vec{v}_{i\_OTH}, \vec{v}_{i\_OTH}\right)}{2} = \sum_i \frac{m_i v_{i\_OTH}^2}{2} = W_{КИН}^{OTH}$ - кинетическая энергия относительного движения точек ;

$\sum_i \frac{2m_i\left(\vec{v}_C, \vec{v}_{i\_OTH}\right)}{2} = \left(\vec{v}_C, \sum_i m_i \vec{v}_{i\_OTH}\right)$, но $\sum_i m_i \vec{v}_{i\_OTH} = m\vec{v}_{C\_OTH}$, где $\vec{v}_{C\_OTH}$ - относительная скорость центра масс в системе отсчета, где центр масс покоится. Очевидно $\vec{v}_{C\_OTH} = \vec{0}$, поэтому

$$\sum_i \frac{2m_i\left(\vec{\mathrm{v}}_C,\vec{\mathrm{v}}_{i\_OTH}\right)}{2}=\left(\vec{\mathrm{v}}_C,\sum_i m_i\vec{\mathrm{v}}_{i\_OTH}\right)=\vec{0}\,.$$

Окончательно исходное равенство примет вид

$$W_{СИСТЕМЫ}=\frac{m_C\mathrm{v}_C^2}{2}+W_{КИН}^{OTH}\,.$$

Полная кинетическая энергия тела (системы точек) равна сумме кинетической энергии движения центра масс и кинетической энергии движения относительно центра масс.(Это утверждение принято называть *теоремой Кёнига*)

Пример. *Определить кинетическую энергию диска массой m* и радиуса R*, катящегося без проскальзывания со скоростью* V.

Решение. Так как диск катится без проскальзывания, то скорость центра масс равна V и величина скорости вращения точек края диска *относительно* центра масс тоже равна V. Следовательно, полная кинетическая энергия:

$$\mathrm{W_K}=\frac{m\mathrm{v}_\mathrm{C}^2}{2}+\mathrm{W_{K.\,ВРАЩ}}\,.$$

При вращении диска вокруг центра масс угловая скорость всех точек равна $\omega=\dfrac{\mathrm{v}}{R}$, поэтому кинетическая энергия вращения $\mathrm{W_{K.\,ВРАЩ}}=\dfrac{I_{z\mathrm{C}}\omega^2}{2}$. Момент инерции диска относительно оси вращения, проходящей через центр масс равен $I_{zC}=\dfrac{mR^2}{2}$. Тогда кинетическая энергия центра масс равна $\mathrm{W_{KC}}=\dfrac{\mathrm{m\cdot V^2}}{2}$. Следовательно

$$\mathrm{W_K}=\mathrm{W_{KC}}+\mathrm{W_{K.\,ВРАЩ}}=\frac{m\cdot\mathrm{v}^2}{2}+\frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\left(\frac{\mathrm{v}}{R}\right)^2=\frac{3}{4}m\mathrm{v}^2\,.\clubsuit$$

Математическое отступление

Пусть задана функция от нескольких аргументов, являющаяся непрерывно-дифференцируемой по каждому из них $f(x,y,z)$. Производная такой функции по одному из аргументов (например, по x) при условии, что остальные *не меняются*, называется *частной производной* по данному аргументу и обозначается $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Тогда для функции f в окрестности точки можно написать

$$f(t,x,y,z)=f(t,x_0,y,z)+\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0)+\ldots$$

Рассмотрим значения этой функции в двух соседних точках пространства, отстоящих друг от друга на малый вектор $d\vec{r}=(dx,dy,dz)$:

$$f_1=f(x,y,z)\ \text{ и }\ f_2=f(x+dx,y+dy,z+dz).$$

Тогда разложение в ряд Тейлора для функции f вблизи точки (x,y,z) имеет вид:

$$f_2=f_1+\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz+\ldots$$

Если ввести вектор $gradf=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$, который называется *градиентом* функции *f*, и отбросить остальные слагаемые в разложении (которые обозначены точками), то для изменения значений *f* можно записать

$$\delta f = f_2 - f_1 \approx \left(gradf, d\vec{r}\right) = \left|gradf\right| \cdot \left|d\vec{r}\right| \cdot \cos\alpha,$$

где α - угол между векторами $gradf$ и $d\vec{r}$.

Свойства градиента функции

1) В каком направлении нужно двигаться, чтобы увеличение функции было максимальным? Видно, что при постоянных величинах $\left|gradf\right|$ и $\left|d\vec{r}\right|$ значение δf будет максимальным при $\cos\alpha = 1$ ($\alpha = 0$), т.е. вектор $d\vec{r}$ должен быть сонаправлен с вектором $gradf$. Следовательно, вектор градиента функции $gradf$ направлен в сторону максимального роста функции *f*.

2) *Поверхностью уровня* функции *f* называется поверхность в пространстве, на которой значение функции является постоянным $f(x,y,z) = const$. Если сместиться вдоль поверхности уровня на малый вектор $d\vec{r}$, то значение функции не изменится, поэтому $\delta f = 0$. Это означает, что $\left(gradf, d\vec{r}\right) = 0$, т.е. векторы $gradf$ и $d\vec{r}$ перпендикулярны. Следовательно, вектор градиента функции направлен перпендикулярно к поверхности уровня функции в каждой её точке.

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ.

В механике силы принято делить на *консервативные* и *неконсервативные*.

Рассмотрим силы между телами, которые зависят только от их взаимного положения. Такие силы называются *консервативными*.

Консервативными силами являются:

1) Сила всемирного тяготения. Она зависит только от расстояния между телами.
2) Сила тяжести. Она является частным случаем силы всемирного тяготения.
3) Сила кулоновского взаимодействия.
4) Сила упругости.

Для каждой из консервативных сил можно определить *потенциальную энергию*.

<u>Потенциальная энергия</u> для консервативной силы - это *физическая величина, зависящая только от положения точки* (*тела*) *относительно других тел, уменьшение которой равно работе соответствующей силы, действующей на точку (тело)*.

$$W_{\text{ПОТЕНЦ\_НАЧАЛЬНАЯ}} - W_{\text{ПОТЕНЦ\_КОНЕЧНАЯ}} = A$$

(Обратите внимание на порядок индексов). Потенциальная энергия, как и работа, измеряется в Джоулях. Потенциальная энергия – это энергия, определяемая *положением тела*. В одном и том же положении тело будет иметь одинаковую потенциальную энергию.

Замечание. Поскольку в определении сказано о *разности* энергий, то энергию можно определить несколько «произвольным образом» - к определяющим соотношениям можно прибавить *любую* постоянную величину С, которая при взятии разности пропадет:

$$\left(W_{\text{П\_НАЧ}} + C\right) - \left(W_{\text{П\_КОН}} + C\right) = A.$$

1) Таким образом, потенциальная энергия определена *с точностью до константы*. Поэтому нельзя говорить об абсолютном значении потенциальной энергии без указания «начала отсчета» - точки, где указано конкретное значение энергии.
2) Работа консервативной силы не зависит от пути, вдоль которого двигалось тело, а только от него начального и конечного положений. Следовательно, работа консервативной силы по замкнутому пути равна нулю.

$$\int\limits_{Путь}\left(\vec{F},d\vec{l}\right)=W_{ПОТ}^{НАЧ}-W_{ПОТ}^{КОН}.$$

Для замкнутого пути $W_{ПОТ}^{НАЧ}=W_{ПОТ}^{КОН}$, поэтому $\oint\limits_{Путь}\left(\vec{F},d\vec{l}\right)=0$. (Кружок в знаке интеграла показывает, что путь замкнутый.)
Замечание. Нельзя сказать, что если работа силы по замкнутому контуру равна нулю, то эта сила – консервативная. Например, вектор магнитной составляющей силы Лоренца всегда направлен перпендикулярно вектору скорости, поэтому работа этой силы по любой траектории, в том числе и по замкнутой, равна нулю. Но эта сила не является консервативной – она относится к *гироскопической*.

Рассмотрим две близкие точки в пространстве, смещенные друг от друга на *малый* вектор $d\vec{r}=\left(dx,dy,dz\right)$, координаты которых $\left(x,y,z\right)$ и $\left(x+dx,y+dy,z+dz\right)$. Работа консервативной силы $\vec{F}$ при перемещении между этими точками

$$A\approx F_x dx+F_y dy+F_z dz=W_{ПОТ}^{НАЧ}-W_{ПОТ}^{КОН}=-\left(W_{ПОТ}^{КОН}-W_{ПОТ}^{НАЧ}\right).$$

Но изменение потенциальной энергии при перемещении между точками можно записать в виде

$$W_{ПОТ}^{КОН}-W_{ПОТ}^{НАЧ}\approx\left(gradW,d\vec{r}\right)=\frac{\partial W}{\partial x}dx+\frac{\partial W}{\partial y}dy+\frac{\partial W}{\partial z}dz.$$

или

$$F_x dx+F_y dy+F_z dz=-\frac{\partial W}{\partial x}dx-\frac{\partial W}{\partial y}dy-\frac{\partial W}{\partial z}dz$$

Так как вектор $d\vec{r}=\left(dx,dy,dz\right)$ произвольный, то поэтому $F_x=-\frac{\partial W}{\partial x}$, $F_y=-\frac{\partial W}{\partial y}$, $F_z=-\frac{\partial W}{\partial z}$, т.е. для консервативной силы должно выполняться равенство

$$\vec{F}=-gradW.$$

Изоэнергетической поверхностью в пространстве называется поверхность уровня энергии, т.е. поверхность на которой величина энергии остается постоянной. Изоэнергетическая поверхность для потенциальной энергии называется также *эквипотенциальной поверхностью*.

Таким образом, *вектор консервативной силы направлен в сторону скорейшего убывания потенциальной энергии перпендикулярно эквипотенциальной поверхности*.

Примеры потенциальной энергии.

1) Найдем потенциальную энергию для силы гравитационного взаимодействия $F_{ГРАВ}=G\frac{m_1 m_2}{R^2}$.

Пусть $\vec{R}$ – радиус-вектор в системе отсчёта, связанной с точкой m_1. Тогда вектор гравитационной силы, действующей на материальную точку m_2, направлен противоположно $\vec{R}$ $\vec{F}_{ГРАВ} = -G\frac{m_1 m_2}{R^2}\vec{e}_{\vec{R}}$, где $\vec{e}_{\vec{R}} = \left(\frac{\vec{R}}{R}\right)$ - единичный вектор направления для вектора $\vec{R}$. Т.к. сила гравитации – консервативная, то должно выполняться равенство

$$\int\limits_{Путь}\left(\vec{F},d\vec{r}\right) = W_{ПОТ}^{НАЧ} - W_{ПОТ}^{КОН}.$$

Этот интеграл не должен зависеть от траектории, поэтому будем интегрировать вдоль радиус-вектора $d\vec{r} = d\vec{R}$. Векторы $\vec{F}_{ГРАВ}$ и $d\vec{R}$ направлены противоположно, поэтому

$$\left(\vec{F}_{ГРАВ},d\vec{r}\right) = -F_{ГРАВ}dR.$$

$$\int\limits_{Путь}\left(\vec{F}_{ГРАВ},d\vec{r}\right) = \int\limits_{R_{НАЧ}}^{R_{КОН}}\left(-F_{ГРАВ}dR\right) = \int\limits_{R_{НАЧ}}^{R_{КОН}}\left(-G\frac{m_1 m_2}{R^2}dR\right) = G\frac{m_1 m_2}{R}\Bigg|_{R_{НАЧ}}^{R_{КОН}} = G\frac{m_1 m_2}{R_{КОН}} - G\frac{m_1 m_2}{R_{НАЧ}}$$

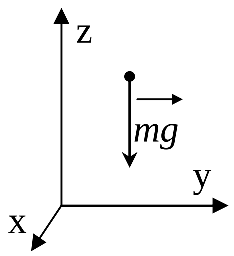
Сравниваем: $W_{ПОТ}^{НАЧ} - W_{ПОТ}^{КОН} = G\frac{m_1 m_2}{R_{КОН}} - G\frac{m_1 m_2}{R_{НАЧ}}$.

Следовательно, потенциальная энергия гравитационного взаимодействия материальных точек определяется выражением

$$W_{ПОТ.ГРАВ} = -G\frac{m_1 m_2}{R} + C.$$

Обратите внимание на знак минус! (Обычно принимают, что C=0.)

2) Для силы тяжести $F_T = mg$ потенциальная энергия $W_П = mgh$



Здесь высота h определяется выбором начала отсчета энергии.

Проверим соотношение $\vec{F} = -gradW$.

В системе отсчёта, связанной с землёй , введем систему координат так, чтобы ось z была направлена вверх (против вектора силы тяжести), тогда потенциальная энергия тела равна $W_П = mgz + C$, где C определяется началом отсчета координаты z.

Эквипотенциальная поверхность – горизонтальная плоскость z=const , поэтому вектор силы должен быть направлен ей перпендикулярно, т.е. вертикально. Величина энергии увеличивается вверх, поэтому вектор силы должен быть направлен вниз. Действительно, $F_x = -\frac{\partial W}{\partial x} = 0$, $F_y = -\frac{\partial W}{\partial y} = 0$, $F_z = -\frac{\partial W}{\partial z} = -mg$. Т.е. вектор силы $\vec{F} = (0,0,-mg)$ в этой системе координат действительно направлен вертикально вниз.

3) Для силы кулоновского взаимодействия: $F_{КУЛ} = k\frac{|q_1 q_2|}{R^2}$ потенциальная энергия:

$$W_{ПОТ.КУЛ} = k\frac{q_1 q_2}{R} + \boldsymbol{C}.$$

(Обычно C=0. В случае если заряды разного знака, то потенциальная энергия отрицательна.)

4) Для силы упругости $F_у = kx$ потенциальная энергия: $W_{ПОТ.УПР} = k\frac{x^2}{2} + \boldsymbol{C}$

(Обычно C=0.)

Потенциальная энергия для обобщенного закона Гука

Из соотношений $x = \varepsilon l$, $E = \frac{kl}{S}$, получаем $W_{ПОТ.УПР} = k\frac{(\varepsilon l)^2}{2} = \frac{kl}{S}\frac{\varepsilon^2}{2}Sl$

Учитывая, что объем деформируемого тела $V = Sl$, находим энергию при возникновении относительной деформации величиной ε:

$$W_{ПОТ.УПР} = \frac{E\varepsilon^2}{2}V\,.$$

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ.

Определение. ***Полной механической энергией тела (системы)*** называется энергия, определяемая движением и положением тела относительно других тел, т.е. сумма потенциальной и кинетической энергий

$$W_{МЕХАН} = W_{КИН} + W_{ПОТ}.$$

Рассмотрим тело, на которое действуют только *консервативные* силы. Изменение кинетической энергии тела равно суммарной работе действующих на нее сил:

$$W_{КИН\_КОНЕЧ} - W_{КИН\_НАЧ} = A\,.$$

Но, так как в системе действуют только консервативные силы, то для них можно ввести потенциальную энергию и выразить работу через уменьшение потенциальной энергии:

$$A = W_{ПОТ\_НАЧ} - W_{ПОТ\_КОНЕЧ}\,.$$

Следовательно, $W_{КИН\_КОНЕЧ} - W_{КИН\_НАЧ} = A = W_{ПОТ\_НАЧ} - W_{ПОТ\_КОНЕЧ}$

или $W_{КИН\_КОНЕЧ} + W_{ПОТ\_КОНЕЧ} = W_{ПОТ\_НАЧ} + W_{КИН\_НАЧ}$. Т.е. $W_{МЕХ\_КОНЕЧ} = W_{МЕХ\_НАЧ}$.

Формулировка закона сохранения механической энергии. *Если на тело или в системе тел действуют только <u>консервативные</u> силы, то механическая энергия тела или системы тел остается постоянной**.***

Пример. *Найти величину второй космической скорости для Земли*. **(***Второй космической скоростью* называется наименьшая скорость старта тела с поверхности планеты, при которой тело может улететь от планеты «навсегда» – т.е. уйти на бесконечно большое расстояние, так что сила притяжения к планете обратится в ноль.)

Решение. Когда тело массой m стартует со скоростью V с Земли, полная механическая энергия системы тело-Земля равна $W_{МЕХ\_НАЧ} = -G\frac{mM_З}{R_З} + \frac{mV^2}{2}$. (Здесь принято, что постоянная C=0). Предположим, что тело улетело от Земли на бесконечно большое расстояние и там остановилось. Тогда полная механическая энергия должна быть равна нулю. Гравитационная сила является консервативной, поэтому в системе планета-тело выполняется закон сохранения механической энергии:

$W_{МЕХ\_КОНЕЧ} = W_{МЕХ\_НАЧ}$ или $-G\frac{mM_З}{R_З} + \frac{mV^2}{2} = 0$, откуда $V = \sqrt{\frac{2GM_З}{R_З}}$

С учетом выражения для ускорения свободного падения близи поверхности Земли: $g = \frac{GM_З}{R_З{}^2}$, получаем $V = \sqrt{2gR_З}$. Видим, что эта скорость больше первой космической в $\sqrt{2}$.♣

Таким образом, консервативные силы сохраняют механическую энергию. Поэтому они так и называются. (Название «консервативные» – переводится как «сохраняющие»).

Помимо консервативных сил в механике вводятся также **диссипативные силы** - силы «рассеивающие» механическую энергию. *Диссипация* – это перевод энергии упорядоченных процессов в энергию неупорядоченных процессов (в конце концов – в тепло).

К диссипативным силам относятся, в частности, сила трения скольжения и сила сопротивления движению тела в жидкости или газе.

Во всех системах тел, независимо от типа действующих сил, всегда выполняется основной закон природы – з*акон сохранения энергии*. *Энергия замкнутой системы не убывает и не увеличивается – она только переходит из одной формы в другую*.

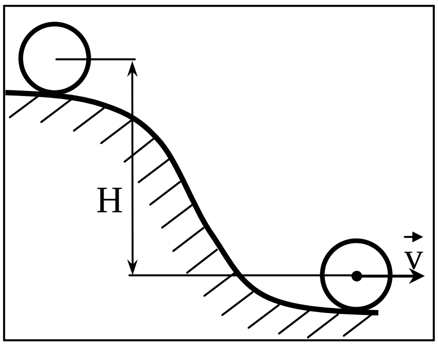
Пусть в системе действуют консервативные и неконсервативные силы. Тогда

$$W_{КИН}^{КОН} - W_{КИН}^{НАЧ} = A_{КОНС} + A_{НЕКОНС}$$

Для консервативных сил $A_{КОНС} = W_{ПОТ}^{НАЧ} - W_{ПОТ}^{КОН}$. Поэтому

$W_{КИН}^{КОН} - W_{КИН}^{НАЧ} = W_{ПОТ}^{НАЧ} - W_{ПОТ}^{КОН} + A_{НЕКОНС}$ или $W_{КИН}^{КОН} + W_{ПОТ}^{КОН} - \left(W_{КИН}^{НАЧ} + W_{ПОТ}^{НАЧ}\right) = A_{НЕКОНС}$, т.е.

$$W_{МЕХ}^{КОН} - W_{МЕХ}^{НАЧ} = A_{НЕКОНС}.$$



<u>Изменение механической энергии системы равно работе неконсервативных сил</u>.

Пример. Диск массы *m* и радиуса *R* скатывается без проскальзывания с горки высотой Н. Найти скорость диска в конце спуска. (Силой сопротивления воздуха пренебречь).

Решение. В данном случае в системе есть сила трения, которая заставляет вращаться диск. Но т.к. диск катится без скольжения, то скорость в точке касания равна нулю. Поэтому мощность силы трения равна нулю, следовательно, и её работа равна нулю. Тогда

$W_{МЕХ}^{КОН} - W_{МЕХ}^{НАЧ} = A_{НЕКОНС} = 0$, т.е. $W_{МЕХ}^{КОН} = W_{МЕХ}^{НАЧ}$ или $mgH = \frac{m\text{v}^2}{2} + \frac{I_z\omega^2}{2}$. Откуда $mgH = \frac{3}{4}m\text{v}^2$,

$\text{v} = \sqrt{\frac{4}{3}gH}$.

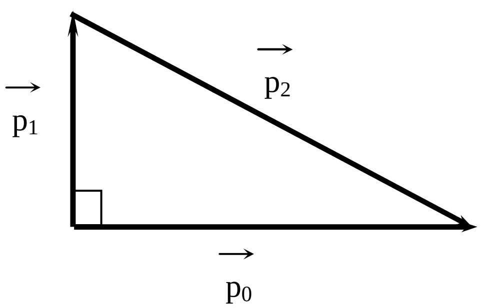
Пример. *Рассмотрим удар двух тел.* Под ударом подразумевается *кратковременное* взаимодействие тел. Если соударяются два тела конечной массы, то выполняется закон сохранения вектора импульса.

Удары можно подразделить на упругие и неупругие. *При упругом* (*абсолютно упругом*) ударе сохраняется суммарная кинетическая энергия тел. При *неупругом*, соответственно, не сохраняется. При *абсолютно неупругом* ударе тела слипаются и далее движутся вместе.

По характеру взаимодействия удар можно описать как *центральный* и *нецентральный*. При *центральном ударе* силы взаимодействия направлены вдоль линии, проходящей через центры масс тел. После центрального удара у тел, двигавшихся до удара только поступательно, не будет вращательного движения вокруг центра масс.

По виду движения тел можно ввести прямой и непрямой удары. При прямом ударе существует такая система отсчета, в которой сила взаимодействия направлена вдоль относительной скорости движения тел. В такой системе отсчета при прямом ударе тела до и после удара будут двигаться вдоль одной прямой линии.

Пример. *Тело массой m_1 , движущееся со скоростью V налетает на неподвижное тело и после упругого центрального соударения отскакивает от него по углом 90^0 к первоначальному направлению своего движения со скоростью V/2. Определить массу неподвижного тела.*



Решение. Перейдем в систему отсчета, в которой плоскость движения совпадает с плоскостью XY системы отсчета. Так как удар упругий, то сохраняется импульс и механическая энергия. Закон сохранения импульса: $\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, где p_0 – начальный импульс налетающего тела, p_1 – конечный импульс налетавшего тела, p_2 – конечный импульс тела, масса которого неизвестна.

Из рисунка видно, что векторы импульса образуют прямоугольный треугольник. Поэтому по теореме Пифагора: $p_2^2 = p_0^2 + p_1^2$ или $m_2^2V_2^2 = m_1^2V^2 + m_1^2V_1^2$.

Закон сохранения энергии: $\frac{m_1V^2}{2} = \frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2}$.

Получили систему уравнений $\begin{cases} m_2^2V_2^2 = m_1^2V^2 + m_1^2V_1^2 \\ \frac{m_1V^2}{2} = \frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2} \end{cases}$

Второе уравнение умножим на $2m_2$: $m_1m_2\left(V^2 - V_1^2\right) = m_2^2V_2^2$ и в правую часть подставим первое уравнение: $m_1m_2\left(V^2 - V_1^2\right) = m_1^2V^2 + m_1^2V_1^2$.

Отсюда $m_2 = \frac{m_1\left(V^2 + V_1^2\right)}{V^2 - V_1^2}$ или с учетом заданных значений скоростей:

$$m_2 = \frac{m_1\left(V^2 + \dfrac{V^2}{4}\right)}{V^2 - \dfrac{V^2}{4}} = \frac{5}{3}m_1 . ♣$$

Пример. *Два шарика одинакового размера с массами* m_1 и m_2 *движутся со скоростями* V_1 *и* V_2 *вдоль одной прямой и упруго соударяются. Найти скорости шариков после удара.*

Решение. Поскольку удар, очевидно, является центральным и прямым, шарики после удара будут двигаться вдоль той же прямой. Запишем закон сохранения импульса в проекции на эту прямую:

$$m_1V_1 + m_2V_2 = m_1U_1 + m_2U_2 .$$

Закон сохранения энергии:

$$\frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_1V_2^2}{2} = \frac{m_1U_1^2}{2} + \frac{m_1U_2^2}{2} .$$

В итоге, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} m_1V_1 + m_2V_2 = m_1U_1 + m_2U_2 \\ m_1V_1^2 + m_2V_2^2 = m_1U_1^2 + m_2U_2^2. \end{cases}$$

Если первое уравнение переписать в виде: $m_1\left(V_1 - U_1\right) = m_2\left(U_2 - V_2\right)$,

а второе уравнение переписать в виде:

$m_1\left(V_1^2 - U_1^2\right) = m_2\left(U_2^2 - V_2^2\right)$ или $m_1\left(V_1 - U_1\right)\left(V_1 + U_1\right) = m_2\left(U_2 - V_2\right)\left(U_2 + V_2\right)$,

то с учетом первого уравнения получаем: $V_1 + U_1 = U_2 + V_2$.

Тогда $U_1 = U_2 + V_2 - V_1$, поэтому, подставив это выражение в первое уравнение, получаем:

$$m_1\left(2V_1 - U_2 - V_2\right) = m_2\left(U_2 - V_2\right)$$

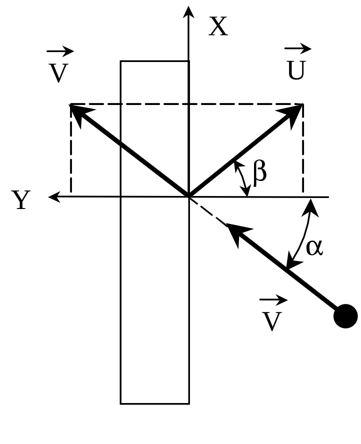
Откуда: $U_2 = \dfrac{2m_1V_1 + \left(m_2 - m_1\right)V_2}{\left(m_2 + m_1\right)}$ и $U_1 = \dfrac{2m_2V_2 + \left(m_1 - m_2\right)V_1}{\left(m_2 + m_1\right)}$.♣

Выводы из решения данной задачи.

1) Пусть шары имеют одинаковые массы $m_1=m_2$. Тогда скорости $U_2=V_1$, $U_1=V_2$, т.е. шарики **обмениваются скоростями** после удара.

2) Пусть масса второго шарика много больше массы первого шарика $m_2>>m_1$. Тогда $U_2=V_2$, $U_1 = 2V_2 - V_1$. Таким образом, **второй шарик не изменит своей скорости после удара**. ♣

Пример. *На покоящуюся гладкую стенку под углом* α *к нормали со скоростью V налетает шарик и упруго ударяется о стенку. Найти скорость шарика после удара.*



Решение. Так как масса стенки много больше массы шарика, то, как видно из результатов решения предыдущей задачи, скорость стенки не изменится.

Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{mV^2}{2} = \frac{mU^2}{2} \text{ или } V^2 = U^2$$

(энергию стенки не учитываем, так как она покоится). Т.е.

скорость шарика сохраняется по величине.
Стенка гладкая – сила трения отсутствует, поэтому импульс шарика вдоль оси X сохраняется:

$$mV \cdot \sin\alpha = mU \cdot \sin\beta \, .$$

Следовательно, угол падения равен углу отражения: $\alpha=\beta$.
При упругом ударе о неподвижную стенку составляющая скорости, параллельная стенке не изменяется, а составляющая скорости, перпендикулярная стенке изменяет свое направление на обратное. Угол падения равен углу отражения.♣