Лекция 1. Вводная.

Предмет физики. Физический объект, физическое явление, физический закон. Системы отсчета. Кинематика материальной точки. Угловые скорость и ускорение. Классический закон сложения скоростей и ускорений при поступательном движении подвижной системы отсчета.

Физика (с древнегреческого переводится как ПРИРОДА) – наука, занимающаяся изучением простейших, и вместе с тем наиболее общих законов материального мира. Вследствие этой общности не существует явлений природы, не имеющих физических свойств или сторон. Понятия физики и её законы лежат в основе всего естествознания.

В своей основе физика – экспериментальная наука: её законы базируются на фактах, установленных опытным путем. Эти законы представляют собой строго определенные количественные соотношения и формулируются на математическом языке.

Различают экспериментальную физику (опыты, проводимые для обнаружения новых фактов и для проверки открытых физических законов), и теоретическую физику (цель которой состоит в формулировке общих законов природы и в объяснении конкретных явлений на основе этих законов, а также в предсказании новых явлений.)

Современная физика имеет дело с немногим числом фундаментальных законов, или фундаментальных физических теорий, охватывающих все разделы физики. Эти теории представляют собой обобщение наших знаний о характере физических процессов и явлений; приближенно, но наиболее полное отражение различных форм движения материи в природе.

К фундаментальным физическим теориям относятся:
- классическая механика Ньютона,
- механика сплошных сред,
- термодинамика,
- статистическая физика,
- электродинамика,
- специальная теория относительности и релятивистская механика,
- общая теория относительности,
- квантовая механика,
- квантовая статистика,
- квантовая теория поля.

Физические законы записываются в виде математических соотношений между физическими величинами.

> **Физи́ческий зако́н** — эмпирически установленная и выраженная в строгой словесной и/или математической формулировке устойчивая связь между повторяющимися явлениями, процессами и состояниями тел и других материальных объектов в окружающем мире. Выявление физических закономерностей составляет основную задачу физической науки.
> **Физический объект** - выделенная для анализа часть физического мира.

Физическая величина - характеристика одного из свойств физического объекта: - общая в качественном отношении многим физическим объектам; но - индивидуальная в количественном отношении для каждого объекта.

Физические величины имеют единицы измерения (размерности), которые отражают их физические свойства. В настоящее время для систем единиц принята международная система (СИ) в которой основными единицами являются килограмм, метр, секунда, ампер, кельвин, моль и кандела. В рамках СИ считается, что эти единицы имеют независимую размерность, т.е. ни одна из основных единиц не может быть получена из других. (ГОСТ 8.417-81 Государственная система обеспечения единства измерений).

Основным приемом познания является **научный метод** — совокупность основных способов получения новых знаний и методов решения задач в рамках любой науки.

Метод включает в себя способы исследования феноменов, систематизацию, корректировку новых и полученных ранее знаний.

Умозаключения и выводы делаются с помощью правил и принципов рассуждения на основе эмпирических (наблюдаемых и измеряемых) данных об объекте.

Базой получения данных являются *наблюдения и эксперименты*.

Для объяснения наблюдаемых фактов выдвигаются гипотезы и строятся теории, на основании которых формулируются выводы и предположения. Полученные прогнозы проверяются экспериментом или сбором новых фактов.

Важной стороной научного метода, его неотъемлемой частью для любой науки, является требование объективности, исключающее субъективное толкование результатов. *Не должны приниматься на веру какие-либо утверждения, даже если они исходят от авторитетных учёных*.

Всякая физическая теория базируется на каких-то основных положениях (постулатах). При этом в рамках этой теории пренебрегают какими-то явлениями. Затем по результатам опытных данных проверяют выводы, полученные из этой теории. Если необходимо, то основные положения теории уточняются и т.д.

В классической механике, например, время рассматривается как абсолютный параметр, не зависящий от других явлений.

Одной из простейших моделей физического объекта является <u>точка</u> – это тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь. Материальная точка – точка, имеющая массу. Точечный заряд – точка, имеющая электрический заряд.

Кинематика.

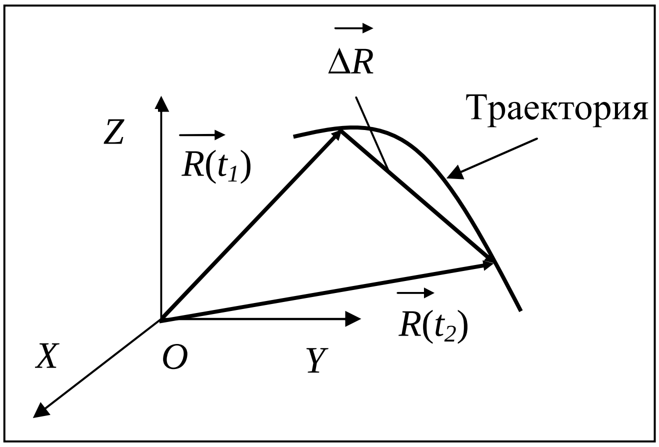
Кинематика описывает общие законы движения точки (без учета сил). Именно в кинематике вводятся понятия вектора скорости, вектора ускорения, вектора перемещения.

При описании движения необходимо определить систему отсчета – это совокупность системы координат и часов, связанных с телом, по отношению к которому изучается движение – это тело называется *началом отсчета*. Выбор системы отсчета определяется целью и удобством описания движения точек или тел. В качестве системы координат применяют, например, декартову (правую) систему, или сферическую и т.д.

Траектория, перемещение.

Пусть некоторая точка движется в пространстве. Множество (геометрических) точек в пространстве, которые проходит (физическая) точка при своем движении называется ***траекторией*** точки. ***Уравнение траектории*** – это уравнение, выражающая соотношение между пространственными координатами (время в классической физике не является пространственной координатой.)

Закон движения - это закон изменения радиус-вектора точки, выраженный в виде $\vec{R}_A = \vec{R}(t)$ (Эта запись означает, что координаты радиус-вектора точки А в каждый момент времени задаются тремя функциями $\vec{R}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, зависящими от времени t.). Путь – это участок траектории между начальным и конечным положениями точки с учётом направления движения, (т.к. точка может двигаться «туда» и «обратно»). *Замечание*. Иногда путем называют длину пути – обычно это ясно из условия задачи – например, «найти путь, пройденный точкой до остановки».



Длина пути равна длине участка траектории только в случае, когда направление вектора скорости точки не меняется.

Примеры траекторий. Если траектория - окружность, то движение точки называют движением по окружности. Если траектория – прямая линия, то движение называют прямолинейным.

Вектором перемещения $\Delta\vec{R}$ за интервал времени (t_1, t_2) называется вектор, соединяющий начальное (в момент t_1) и конечное (в момент t_2) положения точки.

По определению, вектор перемещения равен ***векторной*** разности радиус-векторов

$$\Delta\vec{R} = \vec{R}(t_2) - \vec{R}(t_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

(т.е. координаты вектора перемещения равны разности соответствующих координат этих векторов). Из рисунка видно, что вектор перемещения лежит на *секущей* прямой для траектории.

(Если точка покоится, то вектор перемещения – нулевой $\Delta\vec{R} = \vec{0}$. Или если точка в процессе своего движения вернулась в ту же точку, то вектор перемещения **также** нулевой.)

Величиной перемещения (или просто перемещением) называется длина вектора перемещения:

$$\Delta R = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

Очевидно, что длина пути L и величина перемещения ΔR, в общем случае, не совпадают, при этом выполняется соотношение $L \geq \Delta R$. Длина пути равна величине перемещения только при прямолинейном движении в одном направлении (когда вектор скорости не меняет своего направления.)

Средней путевой скоростью (или средней скоростью пути) называется скалярная (числовая) величина, равная отношению длины пути точки за интервал времени (t_1, t_2) к величине этого интервала $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\mathrm{V}_{\text{СР.ПУТИ}} = \frac{L}{\Delta t} \text{ (м/с)}.$$

Вектором средней скорости перемещения (или просто скоростью перемещения) за период времени (t_1, t_2) называется ***вектор*** равный отношению вектора перемещения к величине этого промежутка времени Δt.

$$\vec{\mathrm{V}}_{\text{СР.ПЕРЕМ}} = \frac{\Delta\vec{R}}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}\right).$$

Координаты этого вектора получены делением координат вектора перемещения на величину интервала времени Δt (так как промежуток времени положительно число, то направления вектора перемещения и вектора средней скорости перемещения совпадают). Вектор средней скорости среднего перемещения может быть отложен от любой точки отрезка - вектора перемещения $\Delta\vec{R}$.

Очевидно, что для скоростей выполняется соотношение $\mathrm{V}_{\text{СР.ПУТИ}} \geq \left|\vec{\mathrm{V}}_{\text{СР.ПЕРЕМ}}\right|$

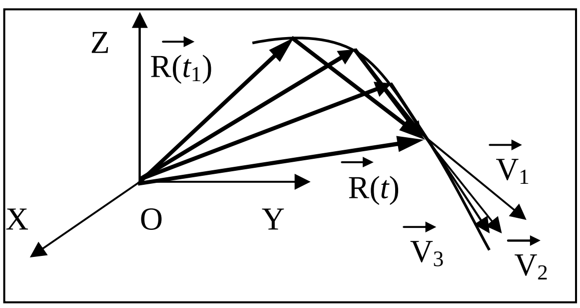
Для нахождения длины пути можно поступить следующим образом. Разбиваем весь путь на столь малые участки, что их можно с большой точностью аппроксимировать отрезком прямой (вектором перемещения). Зная среднюю скорость перемещения на каждом из этих отрезков $\vec{\mathrm{V}}_{\text{СР.ПЕРЕМ}\_i} = \dfrac{\Delta\vec{R}_{\_i}}{\Delta t_{\_i}}$ можно приближенно найти длину каждого участка $\mathrm{L}_{\_i} \approx \left|\Delta\vec{R}_{\_i}\right| = \left|\vec{\mathrm{V}}_{\text{СР.ПЕРЕМ}\_i}\right| \cdot \Delta t_{\_i}$, тогда вся длина пути $\mathrm{L} = \sum\limits_i \mathrm{L}_{\_i} \approx \sum\limits_i \left|\vec{\mathrm{V}}_{\text{СР.ПЕРЕМ}\_i}\right| \cdot \Delta t_{\_i}$. С учётом приближенного равенства $\left|\vec{\mathrm{V}}_{\text{СР.ПЕРЕМ}\_i}\right| \approx \mathrm{V}_{\text{СР.ПУТИ}\_i}$ получаем $\mathrm{L} \approx \sum\limits_i \mathrm{V}_{\text{СР.ПУТИ}\_i} \cdot \Delta t_{\_i}$.

Мгновенная скорость.

Мгновенная скорость (скорость) точки $\vec{\mathrm{V}}$, это вектор, являющийся пределом скоростей перемещения (в некоторый момент времени) при стремлении Δt к нулю.

$$\vec{\mathrm{V}} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{\mathrm{V}}_{\text{ПЕРЕМ}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{R}}{\Delta t}.$$

(В математике таким образом определяется первая производная.) Т.е. вектор скорости – это вектор, равный мгновенному изменению вектора перемещения: $\vec{\mathrm{V}} = \vec{R}'(t)$. В



механике *традиционно* производную по времени обозначают верхней точкой. Так что

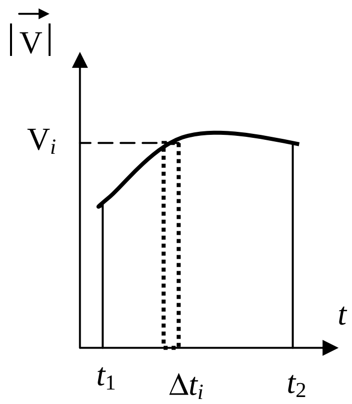
$$\vec{\mathrm{V}} = \frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{dt}} = \dot{\vec{R}}(t)$$

Координаты вектора скорости равны производным от соответствующих координат вектора перемещения:

$$\mathrm{V_X} = \mathrm{X}'(t) = \dot{\mathrm{X}},\ \mathrm{V_Y} = \mathrm{Y}'(t) = \dot{\mathrm{Y}},\ \mathrm{V_Z} = \mathrm{Z}'(t) = \dot{\mathrm{Z}}$$

Вектор скорости <u>всегда</u> лежит на касательной линии к траектории и направлен в сторону перемещения (движения) точки. Величина скорости измеряется в м/с.

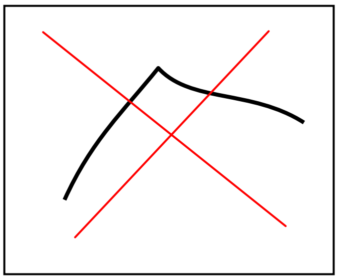
Пример. Если точка движется по прямой линии, то вектор скорости лежит на этой прямой линии. Если точка движется по окружности, то вектор скорости направлен по касательной к окружности, перпендикулярно радиусу окружности.



Величина вектора мгновенной скорости равна мгновенной путевой скорости. Поэтому можно записать выражение $\left|\vec{V}\right| = L'(t)$. Так как длина вектора не может быть отрицательной, то производная от длины пути тоже не может быть отрицательной – это значит, что длина пути не убывает.

Построим график величины мгновенной скорости точки от времени на интервале (t_1, t_2). Рассмотрим малый интервал времени $\Delta t_i \in (t_1, t_2)$. Величину скорости на этом интервале можно считать постоянной и равной V_i. Тогда $V_i \cdot \Delta t_i$ - это площадь малого прямоугольника, а сумма $L \approx \sum_i V_i \cdot \Delta t_i$ будет примерно равна площади фигуры под графиком скорости от времени на интервале (t_1, t_2). При уменьшении промежутков разбиения $\max_i(\Delta t_i) \to 0$ получим величину, которая совпадает с определённым интегралом от величины скорости на интервале (t_1, t_2): $L = \sum_i L_i \approx \sum_i \left|\vec{V}_{\text{СР.ПЕРЕМ\_}i}\right| \cdot \Delta t_i \underset{\max_i(\Delta t_i)\to 0}{\longrightarrow} L = \int_{t_1}^{t_2} \left|\vec{V}\right| dt$

Таким образом, длина пути определяется соотношением $L = \int_{t_1}^{t_2} \left|\vec{V}\right| dt$.



Таким же образом получаем, что перемещение точки за интервал времени (t_1, t_2) (в декартовой системе координат)

$$\Delta\vec{R} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}dt \Leftrightarrow \Delta x = \int_{t_1}^{t_2} v_x dt, \quad \Delta y = \int_{t_1}^{t_2} v_y dt, \quad \Delta z = \int_{t_1}^{t_2} v_z dt.$$

Замечание. *В дальнейшем будут рассматриваться только* ***гладкие*** *траектории, а именно – такие траектории, у которых в каждой точке можно провести касательную. В этом случае движение точки описывается непрерывно дифференцируемыми функциями.*

Ускорение.

В общем случае вектор скорости $\vec{V}$ тоже зависит от времени, т.е. его координаты являются функциями времени $\vec{V} = \left(V_X(t); V_Y(t); V_Z(t)\right)$, следовательно, по аналогии с вышеизложенным можно ввести вектор *среднего* и *мгновенного* ускорений.

Вектор, равный мгновенному изменению вектора скорости называется *вектором ускорения* $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \dot{\vec{V}}$. Его компоненты определяются равенствами $a_x = \dot{v}_x$, $a_y = \dot{v}_y$, $a_z = \dot{v}_z$.

Единицы измерения величины ускорения м/с^2.

Частные случаи движения

1) Если величина вектора скорости точки не меняется (но направление может меняться!), то траекторией точки является некоторая кривая линия. В этом случае, с учётом $\vec{V} = \text{const}$ длина пути вычисляется как $L = \int_{t_1}^{t_2} \left|\vec{V}\right| dt = \left|\vec{V}\right| \cdot (t_2 - t_1)$.

2) Пусть теперь постоянно только *направление* вектора скорости. В этом случае траектория точки лежит на прямой линии. **Всегда можно таким образом ввести систему координат, чтобы этой прямой являлась, например, ось X.** Тогда во все моменты времени остальные координаты Y=0 и Z=0. Вектор скорости должен касаться траектории, поэтому он также лежит на этой прямой и для него также $V_Y=0$, $V_Z=0$. Таким образом, при прямолинейном движении радиус-вектор описывается одной координатой X(t), $\vec{R} = (X(t);0;0)$; вектор скорости одной координатой $V_X(t)$, $\vec{V} = (V_X(t);0;0)$ и ускорение тоже одной координатой $a_X(t)$, $\vec{a} = (a_X(t);0;0)$. Поэтому в данном случае можно не использовать векторное представление, а только числовое – рассматривая только соответствующую координату. О направлении вектора можно судить по знаку координаты - если координата соответствующего вектора положительная, то вектор направлен в положительном направлении оси X. Тогда

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v_x dt, \; \Delta v_x = v_{2x} - v_{1x} = \int_{t_1}^{t_2} a_x dt.$$

В частном случае равноускоренного (равнопеременного движения) $a_x = const$

$$x = x_0 + v_{0x} \cdot (t - t_0) + \frac{a_x \cdot (t - t_0)^2}{2}, \; v_x = v_{0x} + a_x \cdot (t - t_0),$$

где x_0, v_{0x} – значения координаты и скорости в начальный момент времени $t=t_0$.

3) В общем случае движения с постоянным ускорением можно записать для трёх осей декартовой системы координат аналогичные соотношения

$$v_X = v_{0X} + a_X \cdot (t - t_0), \; x = x_0 + v_{0X} \cdot (t - t_0) + \frac{a_X \cdot (t - t_0)^2}{2},$$

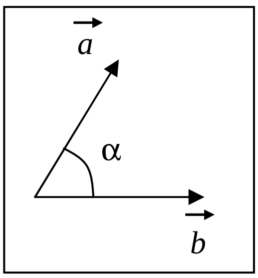
$$v_Y = v_{0Y} + a_Y \cdot (t - t_0), \; y = y_0 + v_{0Y} \cdot (t - t_0) + \frac{a_Y \cdot (t - t_0)^2}{2},$$

$$v_Z = v_{0Z} + a_Z \cdot (t - t_0), \; z = z_0 + v_{0Z} \cdot (t - t_0) + \frac{a_Z \cdot (t - t_0)^2}{2}.$$

или, в векторной форме

$$\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{v}_0 \cdot (t - t_0) + \vec{a} \cdot \frac{(t - t_0)^2}{2}, \; \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot (t - t_0).$$

траекторией тела может быть прямая или парабола, в зависимости от начальных условий.



Математические сведения

Скалярное произведение двух векторов $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ в декартовой системе координат определяется равенством

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z .$$

С другой стороны, в любой системе координат $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\alpha$.

Следствия из этих формул.

1) Если скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю, то эти векторы перпендикулярны друг другу.

2) Скалярное произведение вектора на себя равно квадрату его длины $(\vec{a},\vec{a})=|\vec{a}|^2$, откуда для длины вектора $|\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}$.

3) Определим *единичный вектор направления* для любого вектора $\vec{b}$ как вектор $\vec{\tau}_{\vec{b}}=\dfrac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$. Он не зависит от длины вектора $\vec{b}$, а зависит только от его направления.

Причем длина этого вектора равна единице: $\left|\vec{\tau}_{\vec{b}}\right|=\sqrt{\left(\vec{\tau}_{\vec{b}},\vec{\tau}_{\vec{b}}\right)}=\sqrt{\left(\dfrac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|},\dfrac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}\right)}=1$.

Чтобы найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$, надо найти проекцию на его направление

$$(\vec{a})_{\vec{b}}=|\vec{a}|\cdot\cos\alpha=\frac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{\left|\vec{b}\right|}=\left(\vec{a},\frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}\right)=\left(\vec{a},\vec{\tau}_{\vec{b}}\right).$$

4) Если вектор непрерывно меняется в зависимости от какого-то параметра, то этот вектор можно дифференцировать по этому параметру. Пусть, например, координаты вектора зависят от времени $\vec{a}=\left(a_x(t),a_y(t),a_z(t)\right)$, тогда вектор $\vec{c}$, координаты которого определяются равенствами $c_x=\dfrac{da_x}{dt}$, $c_y=\dfrac{da_y}{dt}$, $c_x=\dfrac{da_y}{dt}$ называется производным от вектора $\vec{a}$, т.е. $\vec{c}=\dfrac{d\vec{a}}{dt}$.

5) Производная от скалярного произведения двух векторов

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{d}{dt}\left(a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z\right)=\frac{da_x}{dt}b_x+\frac{da_y}{dt}b_y+\frac{da_z}{dt}b_z+a_x\frac{db_x}{dt}+a_y\frac{db_y}{dt}+a_z\frac{db_z}{dt}=\left(\frac{d\vec{a}}{dt},\vec{b}\right)+\left(\vec{a},\frac{d\vec{b}}{dt}\right)$$

В частности, $\dfrac{d}{dt}\left(|\vec{a}|^2\right)=\dfrac{d}{dt}(\vec{a},\vec{a})=2\left(\dfrac{d\vec{a}}{dt},\vec{a}\right)$.

6) Если длина вектора $|\vec{a}|=const$ не меняется, но сам вектор не постоянен $\vec{a}\neq const$, то получаем, что из условия $|\vec{a}|^2=const$ вытекает $\dfrac{d}{dt}\left(|\vec{a}|^2\right)=\left(\dfrac{d\vec{a}}{dt},\vec{a}\right)=0$, т.е. эти векторы ортогональны друг другу: $\dfrac{d\vec{a}}{dt}\perp\vec{a}$. В этом случае конец вектора $\vec{a}$ описывает окружность, а вектор $\dfrac{d\vec{a}}{dt}$ направлен по касательной к этой окружности в сторону поворота $\vec{a}$ и, очевидно, $\dfrac{d\vec{a}}{dt}\perp\vec{a}$.

Движение точки на плоскости.

Если траектория точки лежит в плоскости, то такое движение называется «плоским». В этом случае векторы скорости и ускорения также лежат в этой плоскости для любого момента времени.

Вектор ускорения можно представить в виде суммы двух векторов - вектора $\vec{a}_t$, параллельного вектору скорости и вектора $\vec{a}_n$, перпендикулярного вектору скорости

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n .$$

Вектор ускорения $\vec{a}_t$ называется тангенциальным или касательным ускорением, а вектор ускорения $\vec{a}_n$ называется нормальным (перпендикулярным) ускорением.

Введем единичный вектор для направления скорости $\vec{\tau}_{\vec{v}} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$. Этот вектор направлен по касательной к траектории в ту же сторону, что и вектор скорости. Тогда для ускорения должно быть

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d|\vec{v}|}{dt}\vec{\tau}_{\vec{v}} + |\vec{v}|\dot{\vec{\tau}}_{\vec{v}} .$$

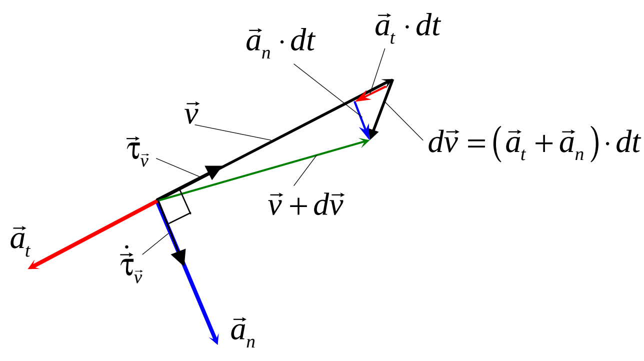
В этом выражении первое слагаемое определяет вектор, параллельный вектору скорости, а второе – перпендикулярный (так как $\vec{\tau}_{\vec{v}} \perp \dot{\vec{\tau}}_{\vec{v}}$), поэтому $\vec{a}_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt}\vec{\tau}_{\vec{v}}$ и $\vec{a}_n = |\vec{v}|\dot{\vec{\tau}}_{\vec{v}}$.

Вектор $\vec{a}_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt}\vec{\tau}_{\vec{v}}$ (тангенциальное или касательное ускорение) отвечает за изменение модуля вектора скорости. Проекция на направление скорости

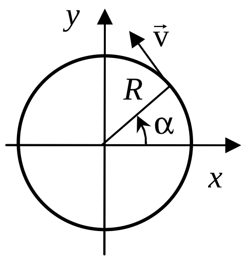
$$(\vec{a}_t)_{\vec{v}} = (\vec{a}_t, \vec{\tau}_{\vec{v}}) = \frac{d|\vec{v}|}{dt}(\vec{\tau}_{\vec{v}}, \vec{\tau}_{\vec{v}}) = \frac{d|\vec{v}|}{dt}.$$

Если модуль (длина) вектора скорости увеличивается, то величина проекции ускорения на направление вектора скорости положительная и $\vec{a}_t$ направлен в ту же сторону, что и вектор скорости $\vec{v}$. И наоборот - если модуль вектора скорости уменьшается, то вектор касательного ускорения направлен против вектора скорости.

Вектор нормального ускорения $\vec{a}_n = |\vec{v}|\dot{\vec{\tau}}_{\vec{v}}$ направлен в ту же сторону, что и вектор $\dot{\vec{\tau}}_{\vec{v}}$, т.е. в сторону поворота вектора скорости, следовательно, он отвечает за изменение направления вектора скорости.



Замечание. К любой гладкой кривой на плоскости в каждой её точке можно построить касательную прямую, которая определяется первой производной от радиус-вектора по некоторому параметру. Подобным же образом можно построить касательную окружность, которая определяется второй производной от радиус-вектора. Поэтому весьма полезным является рассмотрение движения точки по окружности.



Для того чтобы получить явную формулу для величины нормального ускорения рассмотрим движение точки по окружности радиуса R. Пусть окружность лежит в плоскости z=0. Радиус-вектор точки на окружности $\vec{R}=(R\cos\alpha, R\sin\alpha, 0)$. Вектор скорости точки $\vec{v}=\dot{\vec{R}}=(-\dot{\alpha}\cdot R\sin\alpha, \dot{\alpha}\cdot R\cos\alpha, 0)$, вектор ускорения точки $\vec{a}=\dot{\vec{v}}=\left(-\ddot{\alpha}\cdot R\sin\alpha-\dot{\alpha}^2\cdot R\cos\alpha, \ddot{\alpha}\cdot R\cos\alpha-\dot{\alpha}^2\cdot R\sin\alpha, 0\right)$

Введем обозначения: угол α называется угловой координатой,

- величина $\omega=\dfrac{d\alpha}{dt}$ называется *угловой скоростью* (единица измерения 1/с),
- величина $\varepsilon=\dfrac{d^2\alpha}{dt^2}$ называется *угловым ускорением* (единица измерения 1/с^2).

Тогда $\vec{v}=(-\omega R\sin\alpha, \omega R\cos\alpha, 0)$ и величина скорости равна $|\vec{v}|=|\omega|R$.

Рассмотрим проекцию вектора ускорения на единичный вектор

$\vec{\tau}_{\vec{R}}=\dfrac{\vec{R}}{|\vec{R}|}=(\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$

Так как $(\vec{a},\vec{\tau}_{\vec{R}})=(\vec{a}_\tau+\vec{a}_n,\vec{\tau}_{\vec{R}})=(\vec{a}_n,\vec{\tau}_{\vec{R}})$, где

$(\vec{a}_n,\vec{\tau}_{\vec{R}})=\left(-\ddot{\alpha}\cdot R\sin\alpha-\dot{\alpha}^2\cdot R\cos\alpha\right)\cos\alpha+\left(\ddot{\alpha}\cdot R\cos\alpha-\dot{\alpha}^2\cdot R\sin\alpha\right)\sin\alpha$

$(\vec{a}_n,\vec{\tau}_{\vec{R}})=-\dot{\alpha}^2\cdot R\cos\alpha\cos\alpha-\dot{\alpha}^2\cdot R\sin\alpha\sin\alpha=-\omega^2\cdot R$, то

$$|\vec{a}_n|=|\omega|^2\cdot R=\frac{|\vec{v}|^2}{R}.$$

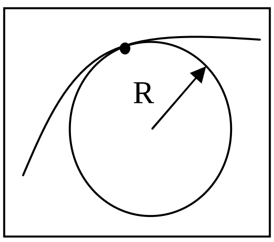
Так как вектор скорости поворачивается *к центру окружности*, то вектор нормального ускорения направлен перпендикулярно вектору скорости также к центру окружности (поэтому его часто называют *центростремительным* ускорением).

Найдем величину касательного ускорения. Так как $\vec{\tau}_{\vec{v}}=\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\dfrac{\omega}{|\omega|}(-\sin\alpha, \cos\alpha, 0)$ и

$a_\tau=(\vec{a},\vec{\tau}_{\vec{v}})=(\vec{a}_\tau+\vec{a}_n,\vec{\tau}_{\vec{v}})=(\vec{a}_\tau,\vec{\tau}_{\vec{v}})$, то

$a_\tau=\dfrac{\omega}{|\omega|}\left(\sin\alpha\left(\varepsilon\cdot R\sin\alpha+\omega^2\cdot R\cos\alpha\right)+\left(\varepsilon\cdot R\cos\alpha-\omega^2\cdot R\sin\alpha\right)\cos\alpha\right)$ или $a_\tau=\dfrac{\omega}{|\omega|}\varepsilon\cdot R$, поэтому

$$|a_\tau|=|\varepsilon|\cdot R.$$



К любой гладкой кривой можно в каждой точке построить не только единственную касательную прямую, но и единственную касательную окружность. Поэтому при произвольном плоском движении точки вектор нормального ускорения направлен к центру этой касательной окружности. Для модуля вектора нормального ускорения можно написать формулу:

$$|\vec{a}_n|=\frac{v^2}{R}.$$

Здесь v^2 – квадрат модуля вектора скорости, R – радиус кривизны траектории в данной точке (радиус окружности, которая касается траектории в данной точке).

Замечание. Это выражение для величины нормального ускорения можно обосновать наглядно. Если точка движется по окружности с постоянной по величине скоростью V, то за малое время dt она пройдет путь $dl = V \cdot dt = R \cdot d\alpha$, где $d\alpha$ - малый (центральный) угол поворота радиус-вектора точки. Так как вектор скорости направлен перпендикулярно к радиусу, то он повернется на такой же угол, поэтому для величины изменения скорости можно записать выражение $dV = Vd\alpha = a_n dt$. Т.е.

$d\alpha = \frac{vdt}{R} = \frac{a_n dt}{v}$, откуда $a_n = \frac{v^2}{R}$.

Величина скорости V, длина пройденного пути L определяются только касательным ускорением точки. О кривизне плоской траектории можно судить по нормальному ускорению точки. ЕСЛИ «НЕ ОБРАЩАТЬ ВНИМАНИЕ» НА НОРМАЛЬНОЕ УСКОРЕНИЕ, ТО ДВИЖЕНИЯ ПО ПРЯМОЙ ЛИНИИ И ПО ГЛАДКОЙ КРИВОЙ НЕРАЗЛИЧИМЫ. В этом смысле при движении по окружности с **постоянным касательным ускорением a_t=const** можно в качестве координаты взять длину дуги $S = R \cdot (\alpha - \alpha_0)$. Предположим, что за интервал времени (t_1, t_2) вектор скорости не меняет своего направления. Тогда длина пути равна длине дуги:

$$S = V_0 \cdot (t_2 - t_1) + \frac{a_t \cdot (t_2 - t_1)^2}{2}$$

или с учетом соотношений, $V_0 = R \cdot \omega_0$, $a_t = R \cdot \varepsilon$

$$R \cdot (\alpha - \alpha_0) = R \cdot \omega_0 \cdot (t_2 - t_1) + \frac{R \cdot \varepsilon \cdot (t_2 - t_1)^2}{2}.$$

Таким образом, при движении по окружности с постоянным угловым ускорением можно написать формулу:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot (t_2 - t_1) + \frac{\varepsilon \cdot (t_2 - t_1)^2}{2}.$$

Соответственно, для угловой скорости $\alpha'(t) = \omega$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot (t_2 - t_1).$$

Частный случай – движение по окружности с постоянной скоростью.

При движении по окружности с постоянной скоростью касательное ускорение равно нулю. Угловая скорость остается постоянной $\omega = \omega_0$, следовательно, и угловое ускорение равно нулю. Тогда угловая координата меняется по закону

$$\alpha = \alpha_0 + \omega \cdot (t - t_0).$$

Одному полному обороту соответствует $\alpha - \alpha_0 = 2\pi$. Время одного оборота называется ПЕРИОДОМ оборота $T = t - t_0$. Отсюда

$$2\pi = \omega \cdot T, \text{ откуда } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

или

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Замечание. Последняя формула может быть получена и другим способом. При движении по окружности длина пути за один оборот равна $L = 2\pi R$, а величина скорости $v = \omega \cdot R$. Если величина скорости постоянная, то $T = \frac{L}{v} = \frac{2\pi R}{\omega R} = \frac{2\pi}{\omega}$.

Величина $\nu = \frac{1}{T}$ называется **частотой вращения** и измеряется в Герцах (Гц). Частота вращения – это количество оборотов в секунду. Тогда угловая скорость выражается через частоту:

$$\omega = 2\pi\nu .$$

Поэтому иногда угловую скорость вращения называют *циклической* (*круговой*) *частотой вращения*.

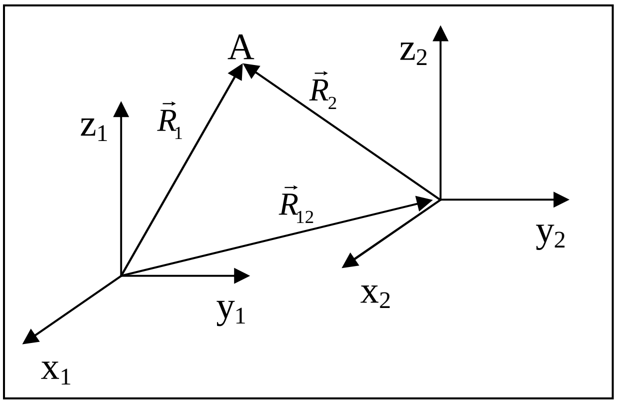
Очень часто скорость вращения задают в *количествах оборотов в минуту* - n (об/мин). Связь частоты и скорости вращения $\omega = 2\pi\nu = 2\pi\frac{n}{60} = \frac{\pi n}{30}$.

Закон сложения скоростей и ускорений.

При описании движения точки все системы отсчета является равноправными. Рассмотрим как преобразуются кинематические величины при переходе от одной системы отсчет к другой. Ограничимся системами отсчета, которые движутся друг относительно друга *поступательно*.

Положение некоторой точки А можно задать в системе отсчета 1 радиус-вектором $\vec{R}_1$, в системе отсчета 2 – радиус-вектором $\vec{R}_2$. Если задан вектор, задающий положения начала отсчет одной системы отсчета относительно другой, то

$$\vec{R}_2 = \vec{R}_1 + \vec{R}_{21}$$



Тогда получаем уравнения связи для скоростей и ускорений

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_{21},\ \vec{a}_2 = \vec{a}_1 + \vec{a}_{21},$$

где $\vec{v}_{21} = \frac{d\vec{R}_{21}}{dt}$, $\vec{a}_{21} = \frac{d\vec{v}_{21}}{dt}$ - векторы скорости и ускорения второй системы отсчет относительно первой.

Системой отсчета, ***сопутствующей*** данной точке называется такая система отсчета, в которой вектор скорости данной точки является нулевым (т.е. точка покоится в данной системе отсчета).

Пример. Сопутствующей системой отсчета для водителя автомобиля является система, связанная с автомобилем, так как в этой системе отсчета водитель покоится.♣