

Московский государственный технический университет  
имени Н. Э. Баумана

Л. К. Мартинсон, Е. В. Смирнов

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ  
ПО КУРСУ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ  
РАЗДЕЛ “КВАНТОВАЯ СТАТИСТИКА ФЕРМИ-  
ДИРАКА. ЭЛЕКТРОННЫЙ ГАЗ”

Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана

2003

## § 1. Волновая функция системы тождественных частиц

Квантовая механика существенно отличается от классической механики в подходе к анализу поведения систем, состоящих из одинаковых частиц. В качестве примера рассмотрим систему, состоящую из двух одинаковых частиц, например, двух электронов, двух нейтронов, двух фотонов и т.д.

С классической точки зрения каждая из частиц характеризуется своей траекторией, и, если известно положение частиц в начальный момент, а также их траектории, то можно определить положение частиц в любой последующий момент времени. Если частицы пронумеровать, то всегда можно указать, где находится частица 1, а где – частица 2 (см. рис.1). Таким образом, с классической точки зрения одинаковые частицы принципиально отличимы одна от другой, или, как говорят, индивидуализированы. Если поменять координаты и скорости обеих частиц, то получится, вообще говоря, новое состояние системы.

В квантовой механике частицы наряду с корпускулярными обладают волновыми свойствами. Состояние системы частиц описывается волновой функцией, зависящей от обобщенных координат частиц  $q_1$  и  $q_2$  и времени  $t$

$$\psi = \psi(q_1, q_2, t) .$$

Здесь  $q_i$  - набор трёх пространственных координат и спиновой координаты (т.е. проекции спина на некоторое направление) для  $i$ -ой частицы.

Поскольку функция  $\psi$  имеет вероятностное толкование, то обнаружив в какой-либо момент времени одну из частиц, принципиально невозможно указать, будет ли это частица 1 или частица 2. Поэтому в квантовой механике при перестановке двух одинаковых частиц не возникает нового состояния системы. Оно остаётся абсолютно тем же, что и до перестановки. С точки зрения квантовой механики одинаковые частицы принципиально неразличимы, тождественны. Поэтому можно говорить о состоянии системы одинаковых частиц только в целом, а не о состоянии каждой частицы в отдельности.

Это положение формулируется в виде принципа тождественности одинаковых частиц: в системе одинаковых частиц реализуются только такие состояния, которые не меняются при перестановке местами двух любых частиц. Это очень важный квантово-механический принцип. Он логически не вытекает из основных положений квантовой механики, но и не противоречит им. Его справедливость подтверждается всей совокупностью экспериментальных данных.

Проанализируем вид волновой функции системы, состоящей из двух одинаковых частиц. Отвлекаясь от зависимости  $\psi$  от времени, волновую функцию можно записать в виде

$$\psi = \psi(q_1, q_2).$$

Переставив местами частицы 1 и 2, мы получим функцию  $\psi(q_2, q_1)$ . Эту операцию можно рассматривать как действие на функцию  $\psi(q_1, q_2)$  оператора перестановки  $\hat{P}$ , который меняет частицы местами

$$\psi(q_2, q_1) = \hat{P}\psi(q_1, q_2).$$

Переставив эти частицы еще раз, получаем

$$\psi(q_1, q_2) = \hat{P}\psi(q_2, q_1) = \hat{P}^2\psi(q_1, q_2).$$

Отсюда следует, что

$$\hat{P}^2 = 1, \quad \text{а} \quad \hat{P} = \pm 1.$$

Таким образом, для квантово-механической системы, состоящей из тождественных частиц, возможны два вида волновых функций:

1. Симметричная волновая функция

$$\psi_S(q_1, q_2) = \psi_S(q_2, q_1).$$

Эта волновая функция при перестановке частиц не меняется.

2. Антисимметричная волновая функция

$$\psi_A(q_1, q_2) = -\psi_A(q_2, q_1).$$

Эта волновая функция при перестановке частиц меняет знак.

Полученные результаты можно обобщить на систему, состоящую из произвольного числа тождественных частиц. При этом симметрия или антисимметрия волновой функции имеет место при перестановке любых двух одинаковых частиц.

Частицы, состояние которых описывается симметричными волновыми функциями, называются бозе-частицами или бозонами. Такое название они получили потому, что состоящие из них системы подчиняются статистике Бозе-Эйнштейна. К бозонам относятся фотоны,  $\pi$ -мезоны,  $K$ -мезоны и другие частицы с нулевым или целым (в единицах  $\hbar$ ) спином.

Частицы, состояние которых описывается антисимметричными волновыми функциями, называются ферми-частицами или фермионами. Такое название связано с тем, что системы, состоящие из этих частиц, подчиняются статистике Ферми-Дирака. К фермионам относятся электроны, протоны, нейтроны и другие частицы с полуцелым (в единицах  $\hbar$ ) спином.

Эта связь между спином частицы и статистикой справедлива и для сложных частиц, которые состоят из элементарных, например, для атомных ядер, атомов, молекул и т.д. Сложные частицы, состоящие из нечетного числа фермионов, являются фермионами, а из четного числа – бозонами. Например, ядро атома  ${}^4_2\text{He}$ , т.е.  $\alpha$ -частица, состоит из двух протонов и двух нейтронов. Спин этого ядра равен нулю, т.е. оно является бозоном. Бозоном будет и сам атом  ${}^4_2\text{He}$  в нормальном состоянии. А ядро легкого изотопа гелия - атома  ${}^3_2\text{He}$  - состоит из нечетного числа – трех – частиц со спинами  $1/2$  : двух протонов и одного нейтрона. Спин этого ядра будет полуцелым, следовательно оно является фермионом. Фермионом будет и сам атом  ${}^3_2\text{He}$ .

Свойство антисимметрии волновых функций системы ферми-частиц приводит к очень важному ограничению на состояния фермионов, известному как принцип Паули: в системе тождественных фермионов не может быть двух частиц, находящихся в одном и том же состоянии. Это означает, что если в системе фермионов какая-либо частица находится в некотором определенном состоя-

нии, то никакая другая частица этой системы не может находиться в этом же состоянии. Таким образом, фермионы являются частицами-индивидуалистами.

Принцип Паули сыграл очень важную роль в обосновании периодической системы элементов Менделеева, а также в объяснении атомных и молекулярных спектров.

Что же касается бозонов, то свойство симметрии волновых функций не накладывает на их состояния никаких ограничений. В одном и том же состоянии может находиться произвольное число одинаковых бозонов, т.е. бозоны, в отличие от фермионов, являются частицами-коллективистами.

## § 2. Распределение Ферми-Дирака.

Различие в поведении ферми- и бозе-частиц приводит к тому, что статистика свойств квантовых систем, состоящих из одинаковых фермионов и систем, состоящих из одинаковых бозонов, будут существенно отличаться друг от друга.

Для фермионов закон распределения частиц по состояниям с различной энергией  $E$  имеет вид

$$\langle n \rangle_{\text{Ф-Д}} = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right) + 1} . \quad (1)$$

Здесь  $k$  - постоянная Больцмана,  $T$  - температура,  $E_F$  - энергия Ферми (уровень Ферми). Функция  $\langle n \rangle_{\text{Ф-Д}}$  называется функцией распределения Ферми-Дирака, она определяет среднее число частиц, находящихся в квантовом состоянии с энергией  $E$ . Поскольку  $\langle n \rangle_{\text{Ф-Д}} \leq 1$ , то говорят, что распределение (1) определяет вероятность того, что квантовое состояние с энергией  $E$  занято частицами при температуре  $T$ .

Энергию Ферми  $E_F$  можно определить как энергию таких состояний, вероятность заполнения которых частицами равна 1/2. Действительно, из (1) следует, что

$$\langle n \rangle_{\phi-D} (E_F, T) = \frac{1}{2} .$$

Энергия Ферми системы фермионов зависит от концентрации частиц  $n$  и от температуры  $T$ . В общем случае эта зависимость оказывается достаточно сложной, однако при  $kT \ll E_F$  она упрощается и принимает вид

$$E_F = E_F(0) \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{E_F(0)} \right)^2 \right]. \quad (2)$$

Здесь  $E_F(0)$ - значение энергии Ферми при абсолютном нуле температуры, которое определяется выражением

$$E_F(0) = \frac{\hbar^2}{2m_0} (3\pi^2 n)^{2/3}, \quad (3)$$

где  $m_0$  - масса частицы.

Мы будем, как правило, рассматривать системы, для которых  $E_F(0) \gg kT$ . При этом, согласно (2), зависимостью энергии Ферми от температуры можно пренебречь и считать, что  $E_F = E_F(0)$ . Однако, следует иметь в виду, что в некоторых физических явлениях, таких, например, как термоэлектрические явления, слабая зависимость энергии Ферми от температуры играет определяющую роль.

На рис.2 приведена зависимость функции распределения Ферми-Дирака от энергии  $E$ . При абсолютном нуле температуры (кривая 1)  $\langle n \rangle_{\phi-D}$  имеет вид ступенчатой функции

$$\langle n \rangle_{\phi-D} = \begin{cases} 1 & \text{при } E < E_F(0) \\ 0 & \text{при } E > E_F(0) \end{cases}. \quad (4)$$

При  $T = 0$  все квантовые состояния (энергетические уровни) вплоть до уровня Ферми  $E_F(0)$  полностью заняты частицами, а все квантовые состояния с энергией  $E > E_F(0)$  - свободны. Поэтому энергию Ферми при абсолютном нуле

температуры  $E_F(0)$  можно определить как максимальную энергию частиц данной системы при  $T = 0$ .

При температуре, отличной от нуля, зависимость функции распределения Ферми-Дирака от энергии  $E$  представлена на рис.2 кривой 2. За счет нагрева системы часть частиц, энергия которых при  $T = 0$  была меньше  $E_F(0)$ , приобретает энергию  $E > E_F(0)$ . Это приводит к тому, что вблизи  $E_F(0)$  возникает область частично заполненных квантовых состояний, т.е. область, в которой

$$0 < \langle n \rangle_{\phi-д} < 1 .$$

Именно в этой области, энергетическая ширина которой порядка нескольких  $kT$ , происходит переход от заполненных уровней к пустым. При низких температурах этот переход происходит очень резко. Чем выше температура, тем больше ширина переходной области и тем более полого идет ниспадающий участок кривой 2.

Квантовые системы, свойства которых отличаются от свойств классических систем вследствие взаимного квантово-механического влияния частиц, обусловленного неразличимостью одинаковых частиц, называются вырожденными системами. Статистические свойства вырожденных систем описываются распределениями Ферми-Дирака (для фермионов) и Бозе-Эйнштейна (для бозонов), тогда как невырожденные системы классических частиц подчиняются статистике Максвелла-Больцмана.

Как следует из вида функции распределения Ферми-Дирака (1), статистические свойства квантовых систем в существенной степени зависят от температуры. При малых энергиях частиц (низких температурах), для которых значение параметра  $(E - E_F)/kT$  невелико, т. е.

$$(E - E_F)/kT < 1$$

квантовая система является вырожденной. При достаточно больших значениях энергии (высоких температурах), для которых

$$(E - E_F)/kT \gg 1 ,$$

квантовое распределение Ферми-Дирака переходит в классическое распределение Максвелла-Больцмана. В этом случае вырождение снимается, и квантовая система ведет себя как невырожденная классическая система частиц.

Температура, ниже которой начинают проявляться квантовые свойства системы, обусловленные тождественностью частиц, называется температурой вырождения. Температура вырождения для невзаимодействующих ферми-частиц (идеального ферми-газа) называется температурой Ферми и определяется как

$$T_F = \frac{E_F(0)}{k} = \frac{\hbar^2}{2km_0} (3\pi^2 n)^{\frac{2}{3}}. \quad (5)$$

Как следует из (5), температура вырождения тем больше, чем меньше масса частиц и чем больше их концентрация. Поэтому  $T_F$  особенно велика у электронного газа в металлах. Действительно, масса электронов очень мала ( $m_0 = m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг), а концентрация электронов в металлах достаточно велика ( $n \sim 10^{28} \div 10^{29} \text{ м}^{-3}$ ), что приводит к значению  $T_F \sim 10^4$  К. Таким образом, даже при температурах, близких к температуре плавления металла ( $\sim 10^3$  К), газ электронов в металле остается вырожденным.

Для обычных газов, состоящих из атомов или молекул, являющихся ферми-частицами, температура вырождения близка к абсолютному нулю. Поэтому такие газы во всей области температур вплоть до температуры сжижения обладают свойствами классического газа.

### § 3. Распределение частиц по энергиям.

В статистической физике, изучающей свойства систем, состоящих из большого числа частиц, важное значение имеет понятие функции распределения частиц по энергиям  $F(E)$ . Обозначим через  $dn$  число частиц в единице объёма,



энергия которых заключена в бесконечно узком интервале энергий от  $E$  до  $E + dE$ . Тогда функция распределения частиц по энергиям определяется соотношением

$$dn = F(E) dE. \quad (6)$$

Число частиц в единице объёма, энергия которых находится в конечном интервале от  $E_1$  до  $E_2$ , получается интегрированием (6)

$$n(E_1, E_2) = \int_{E_1}^{E_2} F(E) dE. \quad (7)$$

Пусть  $n$  - концентрация частиц, т. е. полное число частиц в единице объёма, тогда, согласно (7),

$$n = n(0, \infty) = \int_0^{\infty} F(E) dE.$$

Если функция  $F(E)$  известна, то можно найти среднее значение любой физической величины  $f$ , зависящей от энергии частицы  $E$ ,

$$\langle f \rangle = \frac{\int_0^{\infty} f(E) F(E) dE}{\int_0^{\infty} F(E) dE} = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} f(E) F(E) dE. \quad (8)$$

Так, например, среднее значение энергии частиц системы равно

$$\langle E \rangle = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} E \cdot F(E) dE. \quad (9)$$

В классической статистике Максвелла-Больцмана, которая применяется к классическому газу, функция распределения частиц по энергиям  $F(E)$  зависит от температуры газа  $T$  и имеет вид

$$F(E) = 2n \left( \pi k^3 T^3 \right)^{-\frac{1}{2}} E^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{E}{kT}}. \quad (10)$$

В квантовой статистике Ферми-Дирака функция распределения представляет собой произведение двух функций

$$F(E) = g(E) \langle n \rangle_{\phi-д}(E, T). \quad (11)$$

Здесь  $\langle n \rangle_{\phi-д}(E, T)$ - функция распределения Ферми-Дирака (9), а  $g(E)$ - плотность квантовых состояний, которая определяется выражением

$$g(E) = \frac{\sqrt{2}m_0^{\frac{3}{2}}}{\pi^2 \hbar^3} E^{\frac{1}{2}}, \quad (12)$$

где  $m_0$ - масса частицы. Плотность квантовых состояний  $g(E)$  определяет число квантовых состояний в единице объема в единичном интервале энергий. Из (12) следует, что плотность квантовых состояний растет с ростом энергии ферми-частиц  $E$  пропорционально  $E^{\frac{1}{2}}$ .

Таким образом, функция распределения частиц по энергиям  $F(E)$ , согласно (11), равна произведению плотности квантовых состояний  $g(E)$  на вероятность того, что квантовое состояние с энергией  $E$  занято частицами при температуре  $T$

$$F(E) = \frac{\sqrt{2}m_0^{\frac{3}{2}}}{\pi^2 \hbar^3} \frac{E^{\frac{1}{2}}}{\exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right) + 1}. \quad (13)$$

При  $T = 0$  функция распределения Ферми-Дирака  $\langle n \rangle_{\phi-д}$  является ступенчатой функцией энергии  $E$  ( см. (4) ), следовательно

$$F(E) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}m_0^{\frac{3}{2}}}{\pi^2 \hbar^3} E^{\frac{1}{2}} & \text{при } E < E_F(0) \\ 0 & \text{при } E > E_F(0) \end{cases}. \quad (14)$$

В статистической физике наряду с распределением частиц по энергиям  $F(E)$  используется также распределение частиц по скоростям  $F(v)$  (или по импуль-

сам  $F(p)$ ). Соответствующие функции распределения  $F(E)$  и  $F(v)$  связаны соотношением

$$dn = F(E)dE = F(v)dv.$$

Учитывая, что

$$E = \frac{m_0 v^2}{2} \quad \text{и} \quad dE = m_0 v dv,$$

можно от функции распределения  $F(E)$  перейти к функции распределения  $F(v)$ .

$$F(v) = \frac{m_0^3}{\pi^2 \hbar^3} \frac{v^2}{\exp\left(\frac{m_0 v^2 - 2E_F}{2kT} + 1\right)}. \quad (15)$$

При  $T = 0$  это распределение принимает вид

$$F(v) = \begin{cases} \frac{m_0^3}{\pi^2 \hbar^3} v^2 & , \quad v < v_{max} \\ 0 & , \quad v > v_{max} \end{cases}. \quad (16)$$

где  $v_{max}$  максимальная скорость электронов при  $T = 0$ , определяемая выражением

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2E_F(0)}{m_0}}.$$

#### § 4. Примеры решения задач

Задача 1. Идеальный ферми-газ концентрации  $n$  состоит из частиц массы  $m_0$ . При каких температурах  $T$  будут проявляться квантовые свойства газа, обусловленные тождественностью его частиц, т. е. газ будет вырожденным?

Решение. Решим эту задачу двумя способами.

Способ 1. Ферми-газ будет вырожденным, если его температура  $T$  будет ниже температуры вырождения  $T_F$ , определяемой соотношением (5), т. е.

$$T < \frac{\hbar^2}{2km_0} (3\pi^2 n)^{\frac{2}{3}}.$$

Этот способ решения позволяет сразу получить ответ, однако физическое содержание задачи более подробно раскрывается во втором способе решения.

Способ 2. Газ является вырожденным, если среднее расстояние между его частицами  $a$  будет порядка или меньше средней длины волны де Бройля частиц  $\lambda_B$  т. е.

$$a < \lambda_B.$$

Именно в этом случае проявляются квантовые свойства частиц, и одинаковые частицы становятся неразличимыми.

Поскольку

$$a = n^{-\frac{1}{3}}, \quad \lambda_B = \frac{2\pi\hbar}{(2m_0 E)^{\frac{1}{2}}},$$

где  $E$  - средняя энергия частиц, то это условие принимает вид

$$n^{-\frac{1}{3}} < \frac{2\pi\hbar}{(2m_0 E)^{\frac{1}{2}}}$$

или

$$E < \frac{2\pi^2 \hbar^2}{m_0} n^{\frac{2}{3}}.$$

Поскольку среднее значение энергии частиц ферми-газа при температуре  $T$

$$E > kT,$$

то для оценки  $T$  получаем соотношение

$$T < \frac{2\pi^2 \hbar^2}{km_0} n^{\frac{2}{3}}.$$

Отметим, что найденное значение  $T$  совпадает по порядку величины с температурой вырождения, определяемой соотношением (5).

Задача 2. Оцените энергию Ферми  $E_F$  для меди, считая, что на каждый атом меди приходится по одному свободному электрону.

Решение. Энергия Ферми при не очень высоких температурах зависит от температуры слабо. Так, согласно (9), при  $kT \ll E_F$

$$E_F \cong E_F(0) \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{E_F(0)} \right)^2 \right].$$

Поскольку неравенство  $kT \ll E_F(0)$  выполняется в широком диапазоне температур вплоть до температуры плавления меди, то с достаточной точностью можно считать, что

$$E_F \cong E_F(0) = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{\frac{2}{3}}.$$

Для того, чтобы оценить величину  $E_F$ , нужно знать концентрацию свободных электронов  $n$ . По условию задачи эта концентрация равна концентрации атомов меди  $n^{am}$ . Найдем ее.

Относительная атомная масса меди  $A_r = 63,5$ , плотность  $\rho = 8,93 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, молярная масса  $M = 0,0635$  кг/моль. Число молей, содержащихся в единице объема веществ, равно

$$\nu = \frac{\rho}{M}.$$

Количество частиц в одном моле определяется Авогадро  $N_A$ , следовательно число атомов меди в единице объема, т. е. концентрация атомов меди  $n^{am}$ , равна

$$n^{am} = \nu N_A = \frac{\rho}{M} N_A.$$

Такой же будет, согласно условию задачи, и концентрация электронов  $n$ .

В итоге получаем

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left( 3\pi^2 \frac{\rho N_A}{M} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Подставляя численные значения, находим величину энергии Ферми меди

$$E_F = 1,13 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 7,1 \text{ эВ}.$$

Задача 3. Сколько свободных электронов приходится на атом калия, если энергия Ферми калия  $E_F = 1,9 \text{ эВ}$ ? Плотность калия  $\rho = 862 \text{ кг/м}^3$ .

Решение. Пусть на один атом калия приходится  $\eta$  свободных электронов. Тогда концентрация свободных электронов  $n$  и концентрация атомов калия  $n^{am}$  связаны соотношением  $n = n^{am} \eta$ .

Воспользовавшись решением предыдущей задачи, запишем

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m_0} (3\pi^2 n)^{\frac{2}{3}} = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left( 3\pi^2 \frac{\rho N_A}{M} \eta \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Выражая отсюда  $\eta$ , находим

$$\eta = \frac{M}{2\pi^2 \rho N_A} \left( \frac{2m_0}{\hbar^2} E_F \right)^{\frac{3}{2}}.$$

С учетом численных значений, входящих в это выражение величин, получаем  $\eta = 0,91$ .

Задача 4. Определите максимальную скорость  $v_{\max}$  электронов в металле при  $T = 0$ , если энергия Ферми для него  $E_F(0) = 5 \text{ эВ}$ .

Решение. Как уже отмечалось, газ, подчиняющийся статистике Ферми-Дирака (вырожденный газ), отличается от классического газа тем, что при абсолютном нуле температуры движение частиц в нем не прекращается. Остановка всех частиц Ферми-газа означала бы, что в квантовом состоянии с энергией  $E = 0$  находилось бы большое число частиц, что противоречит принципу Паули.

Так как максимальная энергия частиц вырожденного электронного газа при  $T = 0$  равна энергии Ферми  $E_F(0)$

$$\frac{m_0 v_{max}^2}{2} = E_F(0),$$

то для максимальной скорости электронов  $v_{max}$  получаем

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2E_F(0)}{m_0}}.$$

Подставляя численные значения, находим

$$v_{max} = 1,3 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

Такое большое значение скорости электронов при  $T = 0$  служит еще одним подтверждением того, что свойства вырожденного электронного газа существенно отличается от свойств классического невырожденного газа.

Задача 5. До какой температуры нужно нагреть классический электронный газ, чтобы средняя энергия его электронов оказалась бы равной средней энергии свободных электронов в серебре при  $T = 0$ ? Энергия Ферми для серебра  $E_F(0) = 5,5$  эВ.

Решение. Среднее значение энергии свободных электронов в металле определяется в соответствии с ( 8 ) и ( 9 ) выражением

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^{\infty} E g(E) \langle n \rangle_{\phi-D} dE}{\int_0^{\infty} g(E) \langle n \rangle_{\phi-D} dE}$$

Поскольку  $T = 0$ , то функция Ферми-Дирака  $\langle n \rangle_{\phi-D}$  представляет собой ступенчатую функцию (4), равную единице при  $E < E_F(0)$  и нулю при  $E > E_F(0)$ . Поэтому интегрирование по энергии следует проводить лишь в интервале ( 0,  $E_F(0)$ ). Плотность квантовых состояний  $g(E)$  в соответствии с (12) есть

$$g(E) = CE^{\frac{1}{2}}, \quad \text{где} \quad C = \frac{\sqrt{2}m^{\frac{3}{2}}}{\pi^2 \hbar^3} = const$$

Подставляя  $\langle n \rangle_{\phi-D}$  и  $g(E)$  в выражение для  $\langle E \rangle$ , получаем

$$\langle E \rangle = \frac{C \int_0^{E_F(0)} E^{\frac{3}{2}} dE}{C \int_0^{E_F(0)} E^{\frac{1}{2}} dE} = \frac{3}{5} E_F(0).$$

Средняя энергия электронов в случае классического электронного газа

$$\langle E \rangle_{\text{кл}} = \frac{3}{2} kT.$$

Поскольку по условию задачи  $\langle E \rangle = \langle E \rangle_{\text{кл}}$ , то температура  $T$ , при которой выполняется это равенство, равна

$$T = \frac{2}{5} \frac{E_F(0)}{k}.$$

Подставляя в это выражение значение  $E_F(0)$  для серебра, равное 5,5 эВ, получаем

$$T \cong 2,4 \cdot 10^4 \text{ K}.$$

Отметим еще одно важное обстоятельство. При нагревании вырожденного газа лишь очень незначительная часть электронов изменяет свою энергию. Это те электроны, энергия которых лежит в интервале  $(E_F(0) - kT, E_F(0))$ . Так как вплоть до температуры плавления металла выполняется условие

$$kT \ll E_F(0),$$

то доля электронов, изменяющих свою энергию при нагреве металла, оказывается очень малой. Поэтому средняя энергия электронов при изменении температуры меняется столь незначительно, что этим изменениям можно пренебречь и считать, что

$$\langle E \rangle \approx \frac{3}{5} E_F(0),$$

т. е. что  $\langle E \rangle$  не зависит от температуры.

Таким образом, из квантовой теории следует, что электронный газ в металле, в отличие от классического газа, для которого  $\langle E \rangle_{\text{кл}} = \frac{3}{2} kT$ , не обладает теплоемкостью. Этот результат находится в соответствии с экспериментальными данными по теплоемкости твердых тел.



Задача 6. Оцените минимальную дебройлевскую длину волны свободных электронов в металле при  $T = 0$ , считая, что металл содержит по одному свободному электрону на атом, а его решетка является простой кубической с периодом  $a$ .

Решение. Поскольку дебройлевская длина волны  $\lambda_B$  частицы связана с ее импульсом  $p$  соотношением  $\lambda_B = \frac{2\pi\hbar}{p}$ , то

$$\lambda_{Bmin} = \frac{2\pi\hbar}{p_{max}}.$$

Максимальным импульсом при  $T = 0$  будут обладать электроны с энергией, равной  $E_F(0)$ . Таким образом,

$$p_{max} = (2m_0 E_F(0))^{\frac{1}{2}}.$$

Подставляя в это выражение значение  $E_F(0)$ , определяемое соотношением (3), получаем

$$p_{max} = \left( 2m_0 \frac{\hbar^2}{2m_0} (3\pi^2 n)^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} = \hbar (3\pi^2 n)^{\frac{1}{3}}.$$

Поскольку кристаллическая решетка металла является простой кубической с периодом  $a$ , то

$$n = \frac{1}{a^3}.$$

В силу этого

$$p_{max} = \frac{\hbar}{a} (3\pi^2)^{\frac{1}{3}}.$$

Следовательно, минимальная дебройлевская длина волны свободных электронов в металле при  $T = 0$  равна

$$\lambda_{Bmin} = \frac{2\pi\hbar}{\frac{\hbar}{a} (3\pi^2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2\pi a}{(3\pi^2)^{\frac{1}{3}}} \approx 2a.$$

Полученный результат означает, что длина волны де Бройля свободных электронов в металле превышает среднее расстояние между электронами. Это служит еще одним подтверждением того, что газ свободных электронов в металле является вырожденным.

Задача 7. Найдите среднюю скорость свободных электронов в металле при  $T = 0$ , если энергия Ферми для этого металла  $E_F(0) = 6 \text{ эВ}$ .

Решение. Воспользуемся функцией распределения электронов по энергиям  $F(E)$ . Скорость свободных электронов в металле  $v$  связана с их кинетической энергией  $E$  соотношением

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m_0}} = \sqrt{\frac{2}{m_0}} \sqrt{E}.$$

Среднее значение скорости электронов может быть получено с помощью выражения (8), если в нем положить  $f(E) = v(E)$

$$\langle v \rangle = \frac{\int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2}{m_0}} E^{\frac{1}{2}} F(E) dE}{\int_0^{\infty} F(E) dE}.$$

Так как при  $T = 0$  функция распределения  $F(E)$  является ступенчатой функцией (см. (14)), то, заменяя верхний предел в интегралах на  $E_F(0)$ , получаем

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{2}{m_0}} \frac{\int_0^{E_F(0)} E^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{2} m_0^{\frac{3}{2}}}{\pi^2 \hbar^3} E^{\frac{1}{2}} dE}{\int_0^{E_F(0)} \frac{\sqrt{2} m_0^{\frac{3}{2}}}{\pi^2 \hbar^3} E^{\frac{1}{2}} dE} = \sqrt{\frac{2}{m_0}} \frac{\frac{1}{2} (E_F(0))^2}{\frac{2}{3} (E_F(0))^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{2E_F(0)}{m_0}}.$$

Поскольку при абсолютном нуле температуры максимальная скорость электронов равна

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2E_F(0)}{m_0}},$$

то

$$\langle v \rangle = \frac{3}{4} v_{max}.$$

Подставляя численные значения  $E_F(0)$  и  $m$ , получаем

$$\langle v \rangle = 1,1 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

Способ 2. Воспользуемся функцией распределения электронов по скоростям  $F(v)$ . Тогда

$$\langle v \rangle = \frac{\int_0^{\infty} v \cdot F(v) dv}{\int_0^{\infty} F(v) dv}.$$

где  $F(v)$ , согласно (15), при  $T = 0$  имеет вид

$$F(v) = \begin{cases} \frac{m_0^3}{\pi^2 \hbar^3} v^2, & v < v_{max} \\ 0 & v > v_{max} \end{cases}.$$

Интегрируя, получаем

$$\langle v \rangle = \frac{\int_0^{v_{max}} v \cdot v^2 dv}{\int_0^{v_{max}} v^2 dv} = \frac{\frac{1}{4} v_{max}^4}{\frac{1}{3} v_{max}^3} = \frac{3}{4} v_{max}.$$

Задача 8. Найдите относительное число  $\frac{\Delta N}{N}$  свободных электронов в металле, энергия которых отличается от энергии Ферми не более чем на  $\eta = 1,0\%$ , если температура металла  $T = 0$ .

Решение. Число электронов  $dN(E)$ , энергия которых лежит в интервале от  $E$  до  $E + dE$  равно

$$dN(E) = V \cdot dn(E),$$

где  $V$  - объем металла. Принимая во внимание выражение для  $F(E)$  ( 14 ), находим, что

$$dN = V \frac{\sqrt{2}m_0^{\frac{3}{2}}}{\pi^2\hbar^3} E^{\frac{1}{2}} dE .$$

Относительное число таких электронов определяется выражением

$$\frac{dN(E)}{N} = \frac{dN(E)}{V \cdot n} = \frac{\sqrt{2}m_0^{\frac{3}{2}}}{\pi^2\hbar^3} E^{\frac{1}{2}} dE .$$

Поскольку при  $T = 0$  энергия электронов  $E \leq E_F$ , то искомая величина получается интегрированием данного выражения по энергии в пределах от  $E_F(1-\eta)$  до  $E_F$

$$\frac{\Delta N}{N} = \int \frac{dN(E)}{N} = \int_{E_F(1-\eta)}^{E_F} \frac{\sqrt{2}m_0^{\frac{3}{2}}}{\pi^2\hbar^3 n} E^{\frac{1}{2}} dE = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{2}m_0^{\frac{3}{2}}}{\pi^2\hbar^3 n} \left[ 1 - (1-\eta)^{\frac{3}{2}} \right] E_F^{\frac{3}{2}} .$$

Подставляя сюда значение  $E_F$ , определяемое соотношением ( 3 )

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m_0} (2\pi^2 n)^{\frac{2}{3}} ,$$

получаем

$$\frac{\Delta N}{N} = 1 - (1-\eta)^{\frac{3}{2}} .$$

Поскольку в задаче имеется малый параметр ( $\eta = 0,01 \ll 1$ ), то ответ можно существенно упростить. Используя разложение в ряд Тейлора

$$(1-\eta)^{\frac{3}{2}} \approx 1 - \frac{3}{2}\eta ,$$

получаем

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{3}{2}\eta = 0,015 .$$

Задача 9. Найдите коэффициент сжимаемости ( коэффициент упругости ) электронного газа в меди при температуре  $T = 0\text{K}$ .

Решение. Коэффициент сжимаемости, или упругости газа характеризует относительное изменение объема газа при изменении давления и определяется выражением

$$\alpha = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp} = -\frac{d(\ln V)}{dp},$$

где  $V$  – объем газа,  $p$  – давление. Поскольку число частиц газа  $N$  остается постоянным, то при сжатии газа его концентрация будет возрастать, причем

$$n = \frac{N}{V}, \quad \ln V = \ln N - \ln n, \quad \text{где } \ln N = \text{const}.$$

В соответствии с этим

$$\alpha = -\frac{d(\ln V)}{dp} = \frac{d(\ln n)}{dp}.$$

Из кинетической теории известно, что давление, которое оказывает газ на стенку, определяется средней энергией поступательного движения частиц этого газа  $\langle E \rangle$

$$p = \frac{2}{3} n \langle E \rangle.$$

Для вырожденного электронного газа при  $T = 0 \text{ K}$  ( см. задачу 5 )

$$\langle E \rangle = \frac{3}{5} E_f(0),$$

или, с учетом (3)

$$\langle E \rangle = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m_0} (3\pi^2 n)^{\frac{2}{3}}.$$

Поэтому зависимость давления электронного газа  $p$  от его концентрации  $n$  при  $T = 0 \text{ K}$  имеет вид

$$p = \frac{2}{3} n \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m_0} (3\pi^2 n)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{5} \frac{\hbar^2}{m_0} (3\pi^2)^{\frac{2}{3}} n^{\frac{5}{3}}.$$

Отсюда

$$n = \left[ 5 \frac{m_0}{\hbar^2} (3\pi^2)^{\frac{2}{3}} \right]^{\frac{3}{5}} p^{\frac{3}{5}} = A p^{\frac{3}{5}},$$

где  $A = \text{const}$ . Таким образом,

$$\ln n = \ln A + \frac{3}{5} \ln p.$$

Подставляя это соотношение в выражение для коэффициента сжимаемости, получаем

$$\alpha = \frac{d(\ln n)}{dp} = \frac{3}{5} \frac{d(\ln p)}{dp} = \frac{3}{5} \frac{1}{p}.$$

Воспользовавшись найденной выше зависимостью  $p$  от  $n$ , приходим к выражению

$$\alpha = \frac{3}{5} \left[ \frac{1}{5} \frac{\hbar^2}{m_0} (3\pi^2)^{\frac{2}{3}} n^{\frac{5}{3}} \right]^{-1} = \frac{3m_0}{\hbar^2} (3\pi^2)^{-\frac{2}{3}} n^{-\frac{5}{3}}.$$

Коэффициент сжимаемости электронного газа можно также выразить через энергию Ферми  $E_F(0)$ . С учетом (3) получаем

$$\alpha = \frac{36\pi^2 \hbar^3}{(8m_0)^{\frac{3}{2}}} (E_F(0))^{-\frac{5}{2}}.$$

Взяв значение энергии Ферми для меди  $E_F(0) = 7,1 \text{ эВ} = 1,14 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}$ , получаем численное значение для коэффициента сжимаемости электронного газа в меди

$$\alpha = \frac{36 \cdot (3,14)^2 (1,05 \cdot 10^{-35})^3}{(8 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31})^{\frac{3}{2}}} \cdot (1,14 \cdot 10^{-18})^{-\frac{5}{2}} = 1,33 \cdot 10^{-11} \text{ Па}^{-1} = 1,35 \cdot 10^{-6} \text{ атм}^{-1}.$$

Отметим, что давление электронного газа является одним из основных факторов, определяющих сжимаемость металлов.

## § 5. Задачи для самостоятельного решения

1. Концентрация свободных электронов в металлическом натрии  $n = 2,5 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3}$ .

Воспользовавшись уравнением для давления идеального газа, найдите давление электронного газа в натрии при  $T = 0$ .

$$\text{Ответ: } p = \frac{\hbar^2}{15\pi^2 m_0} (3\pi^2 n)^{\frac{5}{3}} = 5 \text{ ГПа.}$$

2. Часто при расчетах пренебрегают различием значений  $E_F(T)$  и  $E_F(0)$ . Оцените, на сколько процентов отличается  $E_F(T)$  от  $E_F(0)$  для вольфрама при температуре, близкой к его температуре плавления ( $T = 3643 \text{ K}$ ). Считайте, что на каждый атом вольфрама приходится два свободных электрона.

$$\text{Ответ: } \frac{E_F(T) - E_F(0)}{E_F(0)} = 0,1 \%$$

3. Найдите отношение концентраций свободных электронов в литии и цезии  $n^{Li}/n^{Cs}$ , при  $T = 0$ , если энергии Ферми в этих металлах соответственно равны  $E_F^{Li} = 4,72 \text{ эВ}$  и  $E_F^{Cs} = 1,53 \text{ эВ}$ .

$$\text{Ответ: } \frac{n^{Li}}{n^{Cs}} = \left( \frac{E_F^{Li}}{E_F^{Cs}} \right)^{\frac{3}{2}} \cong 5,5.$$

4. Во сколько раз число свободных электронов, приходящихся на один атом металла при  $T = 0$ , больше в алюминии, чем в меди, если энергии Ферми в этих металлах соответственно равны  $E_F^{Al} = 11,7 \text{ эВ}$ ,  $E_F^{Cu} = 7 \text{ эВ}$ ?

$$\text{Ответ: } \frac{\beta^{Al}}{\beta^{Cu}} = \frac{M_{Al}}{M_{Cu}} \cdot \frac{\rho_{Cu}}{\rho_{Al}} \left( \frac{E_F^{Al}}{E_F^{Cu}} \right)^{\frac{3}{2}} \cong 3.$$

5. Какая часть свободных электронов в металле при  $T = 0$  имеет кинетическую энергию, превышающую половину максимальной?

$$\text{Ответ: } \frac{\Delta N}{N} \cong 0,65.$$

6. Металл находится при температуре  $T = 0$ . Найдите, во сколько раз число электронов с кинетической энергией от  $\frac{E_F}{2}$  до  $E_F$  больше, числа электронов с энергией от 0 до  $\frac{E_F}{2}$ .

Ответ: В  $(\sqrt{8} - 1)$  раз.

7. Зная распределение  $dn(E)$  электронов по энергиям, найдите суммарную кинетическую энергию свободных электронов в  $1 \text{ см}^3$  золота, полагая, что на каждый атом золота приходится один свободный электрон.

$$\text{Ответ: } E = \frac{\hbar^2}{10\pi^2 m_0} \left( 3\pi^2 \frac{\rho^{Au} N_A}{M^{Au}} \right)^{\frac{5}{3}} = 31,3 \text{ кДж.}$$

8. Зная распределение  $dn(E)$  электронов в металле по энергиям, найдите распределение  $dn(p)$  электронов по импульсам.

$$\text{Ответ: } dn(p) = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \frac{p^2 dp}{\exp\left(\frac{p^2 / 2m_0 - E_F}{kT}\right) + 1}.$$

9. Металлический брусок объемом  $V$  находится при температуре  $T = 0$ . Найдите число  $\Delta N$  свободных электронов, импульсы которых отличаются от максимального импульса  $p_{max}$  не более, чем на  $\eta \cdot p_{max}$ , где  $0 \leq \eta \leq 1$ . Энергия Ферми данного металла равна  $E_F$ .

$$\text{Ответ: } \Delta N = \frac{[1 - (1 - \eta^3)]}{3\pi^2} \left( \frac{2m_0 E_F}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} V.$$

10. Металл находится при температуре  $T = 0$ . Найдите, во сколько раз число электронов со скоростями от  $\frac{v_{max}}{2}$  до  $v_{max}$  больше числа электронов со скоростями от 0 до  $\frac{v_{max}}{2}$ .

Ответ: В 7 раз.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. М.: ЗАО “Издательство БИНОМ”, 1998. 448 с.
2. Иродов И.Е. Задачи по квантовой физике. М.: Высш. шк., 1991. 175 с.
3. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачи по физике. М.: Высш. шк., 1988. 527 с.
4. Мартинсон Л.К. Методические указания к решению задач по курсу общей физики. Разделы “Элементы квантовой механики”, “Физика твердого тела”. М.: МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1983. 64 с.
5. Мартинсон Л.К., Смирнов Е.В. Методические указания к решению задач по курсу общей физики. Раздел “Уравнение Шредингера. Стационарные задачи квантовой механики”. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. - 32 с.
6. Мартинсон Л.К., Смирнов Е.В. Методические указания к решению задач по курсу общей физики. Раздел “Измерение физических величин в квантовых системах”. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. - 20 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Волновая функция системы тождественных частиц .....	1
2. Распределение Ферми-Дирака .....	3
3. Распределение частиц по энергиям .....	6

4. Примеры решения задач ..... 8

5. Задачи для самостоятельного решения ..... 18

Список литературы ..... 20