Дифференциально-геометрические методы теории управления

Четвериков В.Н.

Лекции для магистров ФН-12, 2019 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное пространство с координатами $(z_1, \ldots, z_n)$, $\mathcal{F} = C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — множество гладких функций на $\mathbb{R}^n$. Дифференциал гладкой функции $f(z_1, \ldots, z_n)$:

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i.$$

1-*Форма* на $\mathbb{R}^n$: $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i dz_i, a_i \in \mathcal{F}$. 1-Форма вида df называется *точной*.

Модуль, порожденный 1-формами $\omega_1, \ldots, \omega_j$ (*кораспределение*): $\operatorname{span}\{\omega_1, \ldots, \omega_j\} = \{a_1\omega_1 + \ldots + a_j\omega_j | a_1, \ldots, a_j \in \mathcal{F}\}$.

Задача: задан модуль $M = \operatorname{span}\{\omega_1, \ldots, \omega_q\}$, определить, существует ли для него базис из точных 1-форм, т.е. существуют ли такие функции $f_1, \ldots, f_q$, что

$$M = \operatorname{span}\{df_1, \ldots, df_q\}.$$

Модуль 2-форм:

$$\left\{ \sum_{i<j} a_{ij} dz_i \wedge dz_j | a_{ij} \in \mathcal{F} \right\}.$$

Внешнее произведение 1-форм:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i dz_i \right) \wedge \left(\sum_{i=1}^{n} b_i dz_i \right) = \sum_{i<j} (a_i b_j - a_j b_i) dz_i \wedge dz_j.$$

Дифференциал 1-формы:

$$d\left(\sum_{i=1}^{n} a_i dz_i \right) = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial a_j}{\partial z_i} - \frac{\partial a_i}{\partial z_j} \right) dz_i \wedge dz_j.$$

Свойства: $\psi \wedge \varphi = -\varphi \wedge \psi, \psi \wedge \psi = 0, d(df) = 0.$

Лемма Пуанкаре: $d\omega = 0 \Longrightarrow$ локально $\omega = df$.

Теорема Фробениуса: для модуля $M = \operatorname{span}\{\omega_1, \ldots, \omega_q\}$ существует базис из точных 1-форм $\Leftrightarrow$

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^{q} \alpha_i^j \wedge \omega_j, \qquad i = \overline{1, q},$$

для некоторых 1-форм α_i^j.

Пример 1.1. $\operatorname{span}\{dz_1 - z_2 dz_3 - z_2 dz_4, dz_2\}$.

Пример 1.2. $\operatorname{span}\{dz_1 - z_2 dz_3 - z_2 dz_4, dz_3\}$.

p-Форма:

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_p \le n} a_{i_1 \ldots i_p} dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p}, \qquad a_{i_1 \ldots i_p} \in C^\infty(M).$$

Внешнее произведение p-формы и 1-формы:

$$\omega \wedge \sum_{j=1}^{n} b_j dz_j = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_p \le n} \sum_{j=1}^{n} a_{i_1 \ldots i_p} b_j dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p} \wedge dz_j,$$

с учетом $dz_i \wedge dz_j = -dz_j \wedge dz_i$ и $dz_j \wedge dz_j = 0$.

Теорема Фробениуса II: для модуля $M = \operatorname{span}\{\omega_1, \ldots, \omega_q\}$ существует базис из точных 1-форм $\Leftrightarrow$

$$d\omega_i \wedge \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_q = 0, \qquad i = \overline{1,\, q}.$$

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОПИСАНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

2.1. Отображения вход – выход

Рассмотрим гладкую систему с входом и выходом:

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m, \tag{2.1}$$

$$y = h(t,x), \quad y \in \mathbb{R}^p. \tag{2.2}$$

Предположим зафиксированы начальные условия для переменных состояния x. Тогда для каждой гладкой векторной функции $u(t)$ переменной t (времени) при подстановке ее в систему (2.1) получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменных состояния. Пусть $x(t)$ — решение соответствующей задачи Коши. Вычисляя $y(t) = h(t,x(t))$, получаем отображение $u(t) \mapsto y(t)$, которое называется *отображением вход – выход.*

В общем случае отображение входа ($u \in \mathbb{R}^m$) в выход ($y \in \mathbb{R}^p$) нелинейной системы с непрерывным временем обычно описывают одним из двух способов. Первое описание связывает вход системы непосредственно с ее выходом с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y_i^{(k_i)} = \varphi_i(t, y, \dot{y}, \ldots, y^{(k-1)}, u, \dot{u}, \ldots, u^{(s)}), \qquad i = \overline{1,p}. \tag{2.3}$$

Обозначения аргументов функции φ_i в (2.3) означают, что эта функция зависит как от управлений и их производных до порядка не выше s, так и от выходов y_j и их производных до порядка не выше $k_j - 1$, $j = \overline{1,p}$.

Уравнения системы (2.3) называют *уравнениями отображения вход – выход.* Чтобы выход был однозначно определен по входу, нужно задать начальные значения для $y_1, \dot{y}_1, \ldots, y_1^{(k_1-1)}, y_2, \dot{y}_2, \ldots, y_p^{(k_p-1)}$.

Второе описание кроме переменных входа и выхода использует дополнительные переменные, которые называют *переменными состояния.* Предполагается, что вход изменяет состояние $x \in \mathbb{R}^n$ системы, например, в соответствии с системой обыкновенных дифференциальных равнений, разрешенных относительно старших первых производных состояния, а выход определяется переменными состояния, управлением и его производными до некоторого порядка r:

$$\dot{x} = f(t,x,u,\dot{u},\ldots,u^{(r_0)}), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m, \tag{2.4}$$

$$y = h(t,x,u,\dot{u},\ldots,u^{(r)}), \quad y \in \mathbb{R}^p. \tag{2.5}$$

Уравнения системы (2.4) называют *уравнениями состояния.*

Среди систем вида (2.4)–(2.5) выделяют частный случай (2.4)–(2.5), когда функция f не зависит от производных управлений, а функция h зависит только от переменных состояния и времени.

В связи с описаниями системы с помощью уравнений отображения вход – выход и с помощью переменных состояния возникают задачи перехода от одного из этих описаний к другому. Будем рассматривать случай произвольных размерностей y, u и гладкие (бесконечно дифференцируемые) правые части уравнений (2.3)–(2.2). Задачи перехода от одного из описаний к другому предполагают нахождение как самих описаний, так и правил пересчета начальных условий. Например, эти правила могут задаваться невырожденной гладкой заменой переменных.

2.2. Построение уравнений отображения вход – выход

Для того, чтобы от уравнений состояния (2.4) нелинейной системы перейти к уравнениям отображения вход – выход (2.3) достаточно исключить переменные состояния из системы дифференциальных уравнений, входящей в описание (2.4). Это можно сделать выразив переменные состояния через координатные функции выхода, входа и их производные, т.е. сделав такую замену переменных в системе дифференциальных уравнений. Для этого по некоторой схеме выбирают координатные функции $y_i = h_i(x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(s)})$ выхода и их производные в силу системы (2.4) и составляют из них систему из n нелинейных уравнений которая должна быть заменой переменных. Вполне может оказаться, что так замену переменных составить нельзя или что возможны разные варианты ее составления и в результате будут получены разные уравнения отображения вход – выход.

Пример 2.1. Найдем уравнения отображения вход – выход для системы

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = x_1 + x_3 + u_1\\
&\dot{x}_2 = x_2 - x_3\\
&\dot{x}_3 = x_1 x_2 + u_2\\
&y_1 = x_1\\
&y_2 = x_2
\end{aligned} \tag{2.6}$$

рассмотрев различные варианты.

Случай 1. Для поиска замены переменных составим систему уравнений

$$\begin{aligned}
&y_1 = x_1\\
&\dot{y}_1 = x_1 + x_3 + u_1\\
&y_2 = x_2.
\end{aligned}$$

Эта система разрешима относительно переменных состояния

$$\begin{aligned}
&x_1 = y_1\\
&x_2 = y_2\\
&x_3 = \dot{y}_1 - y_1 - u_1.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Вычислив

$$\begin{aligned}
&\ddot{y}_1 = \dot{x}_1 + \dot{x}_3 + \dot{u}_1 = x_1 + x_3 + u_1 + x_1 x_2 + u_2 + \dot{u}_1\\
&\dot{y}_2 = \dot{x}_2 = x_2 - x_3
\end{aligned}$$

и воспользовавшись соотношениями (2.7), получим уравнения отображения вход – выход

$$\begin{aligned}
&\ddot{y}_1 = \dot{y}_1 + y_1 y_2 + u_2 + \dot{u}_1\\
&\dot{y}_2 = y_2 - \dot{y}_1 + y_1 + u_1.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Случай 2. В этом случае для поиска замены переменных составим другую систему уравнений

$$\begin{aligned}
&y_2 = x_2\\
&\dot{y}_2 = x_2 - x_3\\
&y_1 = x_1,
\end{aligned}$$

которая тоже определяет замену переменных, поскольку разрешима относительно переменных состояния

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 \\ x_2 &= y_2 \\ x_3 &= y_2 - \dot{y}_2. \end{aligned}$$

В результате получаем другие уравнения отображения вход – выход

$$\begin{aligned} \ddot{y}_2 &= \dot{y}_2 - y_1 y_2 - u_2 \\ \dot{y}_1 &= y_1 + y_2 - \dot{y}_2 + u_1. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Поскольку системы (2.8) и (2.9) были получены из системы (2.6) с помощью замен переменных, то и они преобразуются друг в друга с помощью замен переменных, которые несложно найти воспользовавшись приведенными выше соотношениями. Системы (2.8) и (2.9) имеют тот же порядок, что и исходная система, но в систему (2.8) входит производная управления.

2.3. Метод исключения переменных состояния

Изложим один из способов преобразования системы (2.4) к виду (2.3), который далее будем называть *методом исключения переменных состояния.*

Пусть в (2.4) функции f и h гладкие в области изменения своих аргументов и $h = (h_1, ..., h_p)^{\mathrm{T}}$. Сопоставим функциям $h_1, ..., h_p$ целые числа $k_1, \dots, k_p$, воспользовавшись следующим алгоритмом.

Если $\frac{\partial h_1}{\partial x} \equiv 0$, т.е. h_1 не зависит от переменных состояния, то $k_1 = 0$, иначе k_1 равно наименьшему значению j при котором

$$\operatorname{rang} \frac{\partial(h_1, \dot{h}_1, \dots, h_1^{(j-1)})}{\partial x} = \operatorname{rang} \frac{\partial(h_1, \dot{h}_1, \dots, h_1^{(j-1)}, h_1^{(j)})}{\partial x}.$$

Аналогично, последовательно для $i = 2, \dots, p$, если

$$\operatorname{rang} \frac{\partial(h_1, \dot{h}_1, \dots, h_1^{(k_1-1)}, \dots, h_{i-1}, \dot{h}_{i-1}, \dots, h_{i-1}^{(k_{i-1}-1)})}{\partial x} = \\ = \operatorname{rang} \frac{\partial(h_1, \dot{h}_1, \dots, h_1^{(k_1-1)}, \dots, h_{i-1}, \dot{h}_{i-1}, \dots, h_{i-1}^{(k_{i-1}-1)}, h_i)}{\partial x},$$

то $k_i = 0$, иначе k_i равно наименьшему значению j, при котором

$$\operatorname{rang} \frac{\partial(h_1, \dot{h}_1, \dots, h_1^{(k_1-1)}, \dots, h_{i-1}, \dot{h}_{i-1}, \dots, h_{i-1}^{(k_{i-1}-1)}, h_i, \dot{h}_i, \dots, h_i^{(j-1)})}{\partial x} = \\ = \operatorname{rang} \frac{\partial(h_1, \dot{h}_1, \dots, h_1^{(k_1-1)}, \dots, h_{i-1}, \dot{h}_{i-1}, \dots, h_{i-1}^{(k_{i-1}-1)}, h_i, \dot{h}_i, \dots, h_i^{(j-1)}, h_i^{(j)})}{\partial x}. \tag{2.10}$$

При вычислении производных по времени функций h_i могут появляться производные управлений до порядка $S > s$. Эти производные управлений рассматриваются как новые переменные. Равенства рангов матриц Якоби предполагаются выполненными в некотором открытом подмножестве $\tilde{U}$ изменения всех переменных $x, u, \dot{u}, \dots, u^{(S)} \in \mathbb{R}^N$, $N = n+m(S+1)$. В результате получаем вектор – функцию

$$H = (h_1, \dot{h}_1, \dots, h_1^{(k_1-1)},\ \dots,\ h_p, \dot{h}_p, \dots, h_p^{(k_p-1)})^{\mathrm{T}}$$

размерности $k = k_1 + \ldots + k_p$, координатными функциями который являются только те h_i и их производные, для которых $k_i > 0$.

В множестве $\tilde{U}$ ранг матрицы Якоби $\partial H/\partial x$ равен k. Если $k < n$, то существуют $n - k$ таких гладких функций $\tilde{h}_{k+1}(x), \ldots, \tilde{h}_n(x)$, что в некотором открытом множестве $U \subset \tilde{U}$ ранг матрицы Якоби n-мерной вектор – функции

$$\tilde{H} = (h_1, \dot{h}_1, \ldots, h_1^{(k_1-1)},\ \ldots,\ h_p, \dot{h}_p, \ldots, h_p^{(k_p-1)},\ \tilde{h}_{k+1}(x), \ldots, \tilde{h}_n(x))$$

относительно переменных x равен n. Следовательно, в некоторой окрестности любой точки из множества U для системы

$$\begin{array}{l} y_1 = h_1(x, u\cdots),\ \dot{y}_1 = \dot{h}_1(x, u\cdots),\ \ldots,\ y_1^{(k_1-1)} = h_1^{(k_1-1)}(x, u\cdots), \\ y_2 = h_2(x, u\cdots),\ \dot{y}_2 = \dot{h}_2(x, u\cdots),\ \ldots,\ y_2^{(k_2-1)} = h_2^{(k_2-1)}(x, u\cdots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_p = h_p(x, u\cdots),\ \dot{y}_p = \dot{h}_p(x, u\cdots),\ \ldots,\ y_p^{(k_p-1)} = h_p^{(k_p-1)}(x, u\cdots), \\ z_{k+1} = \tilde{h}_{k+1}(x),\ \ldots,\ z_n = \tilde{h}_n(x), \end{array} \tag{2.11}$$

где через $u\cdots$ обозначены конечные наборы переменных из u, $\dot{u}$, $u^{(2)}, \ldots$, выполнены условия теоремы о неявной функции относительно переменных состояния x. Согласно этой теореме для любой точки из множества U в некоторой ее окрестности W существует гладкое решение системы (2.11) относительно переменных x:

$$x = \psi(y, \dot{y}, \ldots, y^{(k-1)}, z, u\cdots), \quad z = (z_{k+1}, \ldots, z_n)^{\mathrm{T}}.$$

Перейдя в (2.4) к переменным (2.11), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно y_i, $i = \overline{1,p}$, порядка $k \le n$

$$\begin{array}{l} y_1^{(k_1)} = h_1^{(k_1)}(y_1, \dot{y}_1, \ldots, y_1^{(k_1-1)}, u\cdots) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_i^{(k_i)} = h_i^{(k_i)}(y_1, \dot{y}_1, \ldots, y_1^{(k_1-1)},\ \ldots,\ y_i, \dot{y}_i, \ldots, y_i^{(k_i-1)}, u\cdots) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_p^{(k_p)} = h_p^{(k_p)}(y_1, \dot{y}_1, \ldots, y_1^{(k_1-1)},\ \ldots,\ y_p, \dot{y}_p, \ldots, y_p^{(k_p-1)}, u\cdots), \end{array} \tag{2.12}$$

в которой отсутствуют переменные $z_{k+1}, \ldots, z_n$. Докажем это. Равенство (2.10) означает, что строка

$$\frac{\partial h_i^{(k_i)}(x, u\cdots)}{\partial x} = \Big(\frac{\partial h_i^{(k_i)}(x, u\cdots)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial h_i^{(k_i)}(x, u\cdots)}{\partial x_n}\Big)$$

является линейной комбинацией первых $k(i) = k_1 + \ldots + k_i$ строк матрицы Якоби $\partial\tilde{H}/\partial x$ с гладкими коэффициентами $c_s(x, u\cdots)$, $s = \overline{1, k(i)}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_i^{(k_i)}(\varphi(z, u\cdots), u\cdots)}{\partial z} &= \frac{\partial h_i^{(k_i)}(x, u\cdots)}{\partial x}\Big|_{x=\varphi(z,u\cdots)} \frac{\partial \varphi(z, u\cdots)}{\partial z} = \\ &= (c_1(x, u\cdots), \ldots, c_{k(i)}(x, u\cdots), 0, \ldots, 0)\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x}\Big|_{x=\varphi(z,u\cdots)} \frac{\partial \varphi(z, u\cdots)}{\partial z} = \\ &= (c_1(x, u\cdots), \ldots, c_{k(i)}(x, u\cdots), 0, \ldots, 0)\frac{\partial \tilde{H}}{\partial z}\Big|_{x=\varphi(z,u\cdots)} = 0, \end{aligned} \tag{2.13}$$

так как от $z_{k+1},\ \ldots,\ z_n$ зависят только последние $n - k$ компонент векторной функции $\tilde{H}$.

Если все числа k_i, $i = \overline{1,p}$, оказались положительными, то в окрестности W система (2.12) является уравнениями отображения вход – выход.

Если среди чисел k_i, $i = \overline{1,p}$ окажутся равные нулю, например, $k_{i_r} = 0$, $r = \overline{1,r_1}$, то система (2.12) не содержит переменных y_{i_r}, $r = \overline{1,r_1}$ и их производных. В этом случае для получения уравнений отображения вход – выход достаточно к системе (2.12) добавить соотношения $y_{i_r} = h_{i_r}(x, u\cdots)|_{x=\psi(z,u\cdots)}, r = \overline{1,r_1}$, правые части которых будут функциями только переменных из системы уравнений (2.12).

Пример 2.2. Для системы

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + x_1u_1\\
\dot{x}_2 &= x_2 + u_1\\
\dot{x}_3 &= x_3u_2\\
y_1 &= x_1 + x_2\\
y_2 &= x_3x_2
\end{aligned}$$

метод исключения переменных состояния реализуется в виде следующих вычислений.

Ранг матрицы Якоби относительно $x = (x_1, x_2, x_3)$ функций

$$\begin{aligned}
z_1 &= y_1 = x_1 + x_2\\
z_2 &= \dot{y}_1 = x_2 + x_1u_1 + x_2 + u_1
\end{aligned}$$

при $u_1 \neq 2$ равен 2 и не возрастает при добавлении функции

$$\ddot{y}_1 = x_2(2 + u_1) + x_1(u_1^2 + \dot{u}_1) + 2u_1 + \dot{u}_1.$$

Поэтому $k_1 = 2$ и надо рассмотривать возможность добавления к функциям z_1, z_2 функции $z_3 = y_2 = x_3x_2$. Ранг матрицы Якоби относительно x функций

$$\begin{aligned}
z_1 &= y_1 = x_1 + x_2\\
z_2 &= \dot{y}_1 = x_2 + x_1u_1 + x_2 + u_1\\
z_3 &= y_2 = x_3x_2
\end{aligned} \tag{2.14}$$

при

$$u_1 \neq 2, \quad x_2 \neq 0 \tag{2.15}$$

равен 3 и, следовательно, при выполнении этого условия система (2.14) по теореме о неявной функции локально разрешима относительно переменных x. Это решение можно найти

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\dot{y}_1 - 2y_1 - u_1}{u_1 - 2}\\
x_2 &= \frac{\dot{y}_1 - u_1y_1 - u_1}{2 - u_1}\\
x_3 &= y_2\frac{2 - u_1}{\dot{y}_1 - u_1y_1 - u_1}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

и записать уравнения отображения вход – выход при выполнении условия (2.15) в виде системы

$$\begin{aligned}
\ddot{y}_1 &= x_2(2 + u_1) + x_1(u_1^2 + \dot{u}_1) + 2u_1 + \dot{u}_1\\
\dot{y}_2 &= x_2x_3u_2 + x_3(x_2 + u_1),
\end{aligned} \tag{2.17}$$

где x_1, x_2 и x_3 из (2.16).

Отметим, что: 1) действительно правая часть первого уравнения в(2.17) не содержит второй переменной выхода и ее производных; 2) условия (2.15) можно записать в виде

$$u_1 \neq 2, \quad \dot{y}_1 - u_1y_1 - u_1 \neq 0$$

и сделать вывод о том, что хотя исходное описание системы в переменных состояния определено для всех (гладких) управлений, для полученных уравнений отображения вход – выход это неверно; 3) если поменять в исходной системе порядок выходов, то аналогичные вычисления приведут к другим уравнениям отображения вход – выход.

3. ПОСТРОЕНИЕ РЕАЛИЗАЦИЙ

Под *задачей реализации* понимают проблему нахождения по уравнениям отображения вход – выход описания системы в переменных пространства состояний. Систему (2.4)–(2.5) (в частном случае (2.1), (2.2)) называют *реализацией* уравнений (2.3) отображения вход – выход, если при подстановке функций (2.5) в систему (2.3) с учетом (2.4) получаются тождества, и существует такая векторная функция

$$x = X(t, y, \dot{y}, \ldots, y^{(k_0-1)}, u, \dot{u}, \ldots, u^{(s_1)}), \tag{3.1}$$

подстановка которой в систему (2.4)–(2.5) с учетом (2.3) также дает тождества.

Данное определение означает, что системы (2.3) и (2.4) эквивалентны, причем замены переменных задаются уравнениями (2.5) и (3.1) соответственно. Отметим также, что соотношения (2.3) позволяют удалить из выражений (3.1) производные переменной y_i порядка k_i и выше для любого $i = \overline{1,p}$.

В случае реализации вида (2.1) выражение (3.1) не может содержать производные u порядка выше, чем $s-1$, поскольку иначе при его подстановке в дифференциальную часть уравнений состояния (2.1) тождество получиться не может, так как левая часть ($\dot{x}$) зависит от производных u более высокого порядка, чем правая часть этих уравнений. Таким образом, в рассматриваемом случае в выражении (3.1) правая часть может зависеть только от переменных

$$t, y_1, \dot{y}_1, \ldots, y_1^{(k_1-1)}, y_2, \dot{y}_2, \ldots, y_p^{(k_p-1)}, u_1, \ldots, u_1^{(s-1)}, u_2, \ldots, u_m^{(s-1)}. \tag{3.2}$$

Условия существования функции (3.1) удобно сформулировать на языке дифференциальных 1–форм [7, 11]. А именно, обозначим через $\mathcal{F}$ кольцо гладких функций, каждая из которых зависит от t, переменных y, u и некоторого конечного числа их производных. Отметим, что хотя количество аргументов этих функций конечно, но они могут зависеть от производных u любого порядка. Рассмотрим модуль над $\mathcal{F}$, порожденный дифференциалами переменных (3.2):

$$\mathcal{H}_1 = \mathrm{span}_{\mathcal{F}}\{dt, dy, d\dot{y}, \ldots, dy^{(k-1)}, du, \ldots, du^{(s-1)}\}.$$

Отметим, что $\mathcal{H}_1$ состоит из конечных линейных комбинаций указанных дифференциалов с коэффициентами из $\mathcal{F}$. Обозначим через D производную в силу системы (2.3), через $\omega^{(i)}$ — i-ю производную 1-формы ω, в частности: $\omega^{(1)} = D\omega = \dot{\omega}, \omega^{(0)} = \omega$. Пусть

$$\mathcal{H}_{k+1} = \{\omega \in \mathcal{H}_k :\ \dot{\omega} \in \mathcal{H}_k\}, \qquad \mathcal{H}_\infty = \{\omega \in \mathcal{H}_1 :\ \forall i\ \omega^{(i)} \in \mathcal{H}_1\}.$$

При вычислении $\mathcal{H}_i$, $i = 2, 3, \ldots$, полезно учитывать, что если 1-форма $\omega = f\tau \in \mathcal{H}_k$, где $f \in \mathcal{F}$, а $\tau \in \mathcal{H}_{k+1}$, т.е. $\dot{\tau} \in \mathcal{H}_k$,то $\dot{\omega} = \dot{f}\tau + f\dot{\tau} \in \mathcal{H}_k$ и поэтому согласно определению $\mathcal{H}_{k+1}$ 1-форма $\omega = f\tau \in \mathcal{H}_{k+1}$. Так как $\mathcal{H}_1$ — модуль над $\mathcal{F}$, то из приведенного рассуждения следует, что $\mathcal{H}_i$, $i = 2, 3, \ldots$, есть также модули над $\mathcal{F}$. Заметим также, что $D(du_q^{(k)}) = d(Du_q^{(k)}) = du_q^{(k+1)}$ и $D(dy_i^{(l)}) = dy_i^{(l+1)}$. Поэтому

$$du_q^{(k)} \in \mathcal{H}_j \quad \text{при} \quad k \le s-j,\ q = \overline{1,m}, \qquad dy_i^{(l)} \in \mathcal{H}_j \quad \text{при} \quad l \le k_i - j,\ i = \overline{1,p}.$$

Отметим, что наличие символа $u^{(s)}$ в правой части уравнений (2.3) означает, что для некоторых $i = \overline{1,p}$ и $q = \overline{1,m}$ функция φ_i зависит от $u_q^{(s)}$. Для других i правая часть соответствующего уравнения (2.3), а значит, $y_i^{(k_i)}$ может не зависеть от $u_q^{(s)}, q = \overline{1,m}$, хотя какая–либо следующая производная в силу системы (2.3): $y_i^{(k_i+1)}, y_i^{(k_i+2)}, \ldots$, может зависеть от s-ой производной управления, т.е. от какого–то $u_q^{(s)}$. Для каждого $i = \overline{1,p}$ обозначим через $\varkappa_i$ минимальный порядок производной в силу системы (2.3) переменной y_i, которая зависит от $u_q^{(s)}$ для некоторого $q = \overline{1,m}$, если такая производная существует, и положим $\varkappa_i = \infty$, если такой производной нет. Отметим, что $\varkappa_i \geq k_i$.

Теорема 3.1. (a) Реализация вида (2.4)–(2.5) локально существует для уравнения (2.3) отображения вход – выход тогда и только тогда, когда модуль $\mathcal{H}_{s-r_0+1}$ имеет базис из точных 1-форм.

Если такая реализация существует, то
(b) $n = k_1 + \ldots + k_p$;
(c) функция $y_i = h_i$ в (2.5) зависит только от $t, x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(r_0-1)}$, если $\varkappa_i \geq s$, и зависит от $t, x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(s-\varkappa_i)}$, если $\varkappa_i < s$.

Вместо доказательства этой теоремы приведем **алгоритм построения реализаций.**

1. Определяем базис модуля $\mathcal{H}_1$.
2. Последовательно для $i = 2, \ldots, s+1$:

2.1) находим базис модуля $\mathcal{H}_i$;
2.2) проверяем условие Фробениуса существования в $\mathcal{H}_i$ базиса из точных 1-форм. Если условие выполняется, то увеличиваем i на 1 и переходим на шаг 2.1, иначе полагаем $k = i - 1$ и переходим на шаг 3.

3. Находим для модуля $\mathcal{H}_k$ базис из точных 1-форм.
4. Дополняем набор

$$dt,\ du_1,\ \ldots,\ du_1^{(s-k-1)},\ du_2,\ \ldots,\ du_m^{(s-k-1)} \tag{3.3}$$

до базиса модуля $\mathcal{H}_k$ 1-формами $dX_1, \ldots, dX_n$ из предыдущего пункта. Формируем векторную функцию (3.1). Здесь $n = k_1 + \ldots + k_p$.

5. Обращаем замену

$$(t, y, \dot{y}, \ldots, y^{(k-1)}, u, \dot{u}, \ldots, u^{(\tilde{s})}) \longrightarrow (t, x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(\tilde{s})}), \tag{3.4}$$

которая определяется векторной функцией (3.1). Вычисляем выражения (2.5).

6. Дифференцируем замену переменных (3.1) в силу системы (2.3) и исключаем из полученных выражений выходы y с помощью соотношений (2.5). Получаем реализацию (2.4).

Пример 3. Рассмотрим отображение входа в выход, заданное системой

$$\ddot{y}_1 = y_1 y_2^2 + \frac{\ddot{u}}{y_2}\ , \qquad \dot{y}_2 = y_2^2\ . \tag{3.5}$$

В обозначениях (2.3) имеем: $k_1 = 2, k_2 = 1, s = 2$. Найдем последовательно модули $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_3$. Произвольный элемент из $\mathcal{H}_1$ имеет вид

$$\Omega = a_1 dt + a_2 dy_1 + a_3 dy_2 + a_4 d\dot{y}_1 + a_5 du + a_6 d\dot{u}, \qquad a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in \mathcal{F}(\mathcal{E}).$$

Отсюда

$$D\Omega = Da_1 dt + Da_2 dy_1 + Da_3 dy_2 + Da_4 d\dot{y}_1 + Da_5 du + Da_6 d\dot{u} +$$

$$+ a_2 d\dot y_1 + a_3 2y_2 dy_2 + a_4(y_2^2 dy_1 + 2y_1y_2dy_2 + \frac{1}{y_2}d\ddot u - \frac{\ddot u}{y_2^2}dy_2) + a_5 d\dot u + a_6 d\ddot u. \quad (3.6)$$

Если $D\Omega \in \mathcal{H}_1$, то коэффициент при $d\ddot u$ в (3.6) равен нулю. Поэтому $a_4/y_2 + a_6 = 0$. Таким образом, модуль $\mathcal{H}_2$ порождается 1-формами

$$dt, \quad dy_1, \quad dy_2, \quad du, \quad d\dot u - y_2 d\dot y_1. \quad (3.7)$$

Все эти 1-формы, кроме последней, точные. Дифференциал последней 1-формы есть $-dy_2 \wedge d\dot y_1 = d(\dot y_1 dy_2)$. Следовательно, добавив к последней 1-форме набора (3.7) слагаемое $-\dot y_1 dy_2$, мы получим точную 1-форму $d(\dot u - y_2\dot y_1)$. Полученный набор останется базисом модуля $\mathcal{H}_2$, так как добавок выражается через остальные 1-формы базиса. Таким образом, произвольный элемент из $\mathcal{H}_2$ имеет вид

$$\Omega = a_1 dt + a_2 dy_1 + a_3 dy_2 + a_4 du + a_5 d(\dot u - y_2 \dot y_1), \qquad a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathcal{F}(\mathcal{E}).$$

Повторяя наши рассуждения, получаем

$$D\Omega = Da_1 dt + Da_2 dy_1 + Da_3 dy_2 + Da_4 du + Da_5 d(\dot u - y_2\dot y_1) +$$
$$+ a_2 d\dot y_1 + a_3 2y_2 dy_2 + a_4 d\dot u - a_5(y_2^3 dy_1 + 3y_1y_2^2 dy_2 + 2\dot y_1 y_2 dy_2 + y_2^2 d\dot y_1).$$

Если $D\Omega \in \mathcal{H}_2$, то найдется такая функция $g \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$, что $a_4 d\dot u + (a_2 - a_5 y_2^2) d\dot y_1 = g(d\dot u - y_2 d\dot y_1)$. Отсюда $g = a_4$ и $a_2 - a_5 y_2^2 + a_4 y_2 = 0$. Чтобы найти фундаментальную систему решений последнего уравнения, полагаем $a_4 = 1, a_5 = 0$, тогда $a_2 = -y_2$, и $a_4 = 0, a_5 = 1$, тогда $a_2 = y_2^2$. Следовательно, модуль $\mathcal{H}_3$ порождается 1-формами

$$dt, \quad dy_2, \quad du - y_2 dy_1, \quad d(\dot u - y_2\dot y_1) + y_2^2 dy_1.$$

Как и выше, добавляя к последним двум 1-формам слагаемые с dy_2, получаем базис $\mathcal{H}_3$ из точных 1-форм:

$$dt, \quad dy_2, \quad d(u - y_2 y_1), \quad d(\dot u - y_2\dot y_1 + y_2^2 y_1).$$

По теореме 3.1 для системы уравнений (3.5) отображения вход – выход существует реализация вида (2.1)–(2.5). Для построения такой реализации введем переменные

$$x_1 = y_2, \quad x_2 = u - y_2 y_1, \quad x_3 = \dot u - y_2 \dot y_1 + y_2^2 y_1.$$

Тогда

$$y_1 = \frac{u - x_2}{x_1}, \quad y_2 = x_1, \quad \dot y_1 = \frac{\dot u - x_3 + x_1 u - x_1 x_2}{x_1}. \quad (3.8)$$

Подставляя полученные выражения для $y_1, y_2, \dot y_1$ в производные в силу системы (3.5) переменных x_1, x_2, x_3, получаем уравнения состояния:

$$\dot x_1 = x_1^2\,, \qquad \dot x_2 = x_3 - 2x_1 u + 2x_1 x_2\,, \qquad \dot x_3 = x_1^2(u - x_2)\,,$$

а функции выхода определяются первыми двумя уравнениями системы (3.8).

Отметим, что вычисления для системы (3.5) показывают, что $\varkappa_1 = 2, \varkappa_2 = \infty$, но это никак не используется для построения реализации.

Замечание. Теорема 3.1 может быть обощена на случай реализации вида (2.4)–(2.5). А именно, такая реализация локально существует тогда и только тогда, когда модуль $\mathcal{H}_{s-r_0+1}$ имеет базис из точных 1-форм.

Пример 4. Рассмотрим систему

$$\ddot{y}_1 = y_1 y_2^2 + \frac{\ddot{u}}{y_2}\ , \qquad \dot{y}_2 = u\ . \tag{3.9}$$

Рассуждая аналогично предыдущему примеру, находим базис из точных 1-форм

$$dt, \quad dy_1, \quad dy_2, \quad du, \quad d(\dot{u} - y_2\dot{y}_1)$$

модуля $\mathcal{H}_2$ и базис

$$dt, \quad dy_2, \quad d(u - y_2 y_1), \quad d(\dot{u} - y_2\dot{y}_1) + u d\dot{y}_1.$$

модуля $\mathcal{H}_3$. Модуль $\mathcal{H}_3$ не имеет базис из точных 1-форм, так как он не удовлетворяет условию Фробениуса: дифференциал последней 1-формы $du \wedge d\dot{y}_1$ не лежит в идеале, порожденном модулем $\mathcal{H}_3$. Поэтому отображение входа в выход, заданное системой (3.9), имеет реализацию вида (2.4)–(2.5), где $r_0 = 1$. Для построения такой реализации введем переменные

$$x_1 = y_2, \quad x_2 = u - y_2 y_1, \quad x_3 = \dot{u} - y_2\dot{y}_1 - u y_1.$$

Тогда уравнения состояния есть

$$\dot{x}_1 = u\ , \qquad \dot{x}_2 = x_3\ , \qquad \dot{x}_3 = (x_2 - u)(x_1^2 + \frac{\dot{u}}{x_1} - 2\frac{u^2}{x_1^2}) + 2\frac{u}{x_1}(x_3 - \dot{u})\ ,$$

а функции выхода —

$$y_1 = \frac{u - x_2}{x_1}, \quad y_2 = x_1.$$

4. УПРАВЛЯЕМОСТЬ, ДОСТИЖИМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ СИСТЕМ

4.1. Определения достижимости и управляемости

Задача терминального управления для системы

$$\dot{x} = f(x,u), \qquad x \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m, \tag{4.1}$$

с граничными условиями

$$x|_{t=t_{\text{Н}}} = x_{\text{Н}} \tag{4.2}$$

$$x|_{t=t_{\text{К}}} = x_{\text{К}} \tag{4.3}$$

состоит в нахождении такого управления $u = u(t)$, $t \in [t_{\text{Н}}, t_{\text{К}}]$, при котором решение задачи Коши (4.1)–(4.2) удовлетворяет условию (4.3).

Состояние $x_{\text{К}} \in D$ называют *достижимым из состояния* $x_{\text{Н}} \in D$ в области D, если существует решение $(x(t), u(t))$, $t \in [t_{\text{Н}}, t_{\text{К}}]$, системы (4.1), удовлетворяющее условиям (4.2), (4.3) и

$$x(t) \in D, \quad u(t) \in U \quad \text{при} \quad t \in [t_{\text{Н}}, t_{\text{К}}].$$

Систему (4.1) называют *управляемой в области* D, если любое состояние $x_{\text{К}} \in D$ достижимо из любого состояния $x_{\text{Н}} \in D$ в области D.

4.2. Первые интегралы систем и $\mathcal{H}_\infty$

Для описания минимальных реализаций уравнений отображения вход – выход необходимо получить описание первых интегралов этих уравнений.

Функцию $g(t, y, \dot{y}, \ldots, y^{(l)}, u, \dot{u}, \ldots, u^{(r)})$ называют *первым интегралом системы* (2.3), если производная этой функции в силу системы (2.3) тождественно равна нулю. В данном пункте мы покажем, что дифференциалы первых интегралов системы (2.3) лежат в $\mathcal{H}_\infty$.

Системы вида (4.1) есть частный случай систем (2.3): при $p = n, s = 0, y_i = x_i, k_i = 1$ для любого $i = \overline{1,p}$. Поэтому все понятия и результаты этого пункта распространяются и на системы вида (4.1).

Отметим сначала, что соотношения (2.3) позволяют удалить из первого интеграла системы (2.3) производные переменной y_i порядка k_i и выше для любого $i = \overline{1,p}$. После такой замены первый интеграл g не может зависеть от производных u порядка выше, чем $s-1$. Действительно, если s_0 — максимальный порядок производной u, от которой зависит g, и $s_0 > s-1$, то производная g в силу системы (2.3) равна

$$k\frac{\partial g}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{l_\alpha=0}^{k_\alpha-2} y_\alpha^{(l_\alpha+1)}\frac{\partial g}{\partial y_\alpha^{(l_\alpha)}} + \sum_{\alpha=1}^{p}\varphi_\alpha\frac{\partial g}{\partial y_\alpha^{(k_\alpha-1)}} + \sum_{\beta=1}^{m}\sum_{k=0}^{s_0} u_\beta^{(k+1)}\frac{\partial g}{\partial u_\beta^{(k)}}$$

и зависит от $u_\beta^{(s_0+1)}$ для некоторого $\beta = 1, \ldots, m$, а значит, не может быть тождественно равной нулю. Таким образом, первый интеграл системы (2.3) может зависеть только от переменных

$$t, y_1, \dot{y}_1, \ldots, y_1^{(k_1-1)}, y_2, \dot{y}_2, \ldots, y_p^{(k_p-1)}, u_1, \ldots, u_1^{(s-1)}, u_2, \ldots, u_m^{(s-1)}. \tag{4.4}$$

В частности, отсюда следует, что $dg \in \mathcal{H}_1$.

Пусть $k^* = s + k_1 + \ldots + k_p + 2$. Пространство с координатами

$$t, y_1, \dot{y}_1, \ldots, y_1^{(k_1-1)}, y_2, \dot{y}_2, \ldots, y_p^{(k_p-1)}, u_1, \ldots, u_1^{(j+s-2)}, u_2, \ldots, u_m^{(j+s-2)}, \quad j = k^* + 1,$$

обозначим через $\mathcal{E}$. Можно показать, что для любого $j = \overline{1, k^*+1}$ базис модуля $\mathcal{H}_j$ можно выбрать из 1–форм $\omega_1^j, \ldots, \omega_{k_j}^j$, зависящих только от координат на $\mathcal{E}$. Отождествим эти формы с соответствующими 1–формами на $\mathcal{E}$. Отметим, что хотя эти формы образуют базис модуля $\mathcal{H}_j$, но в некоторых точках $\mathcal{E}$ они могут быть линейно зависимыми. Под *размерностью модуля* $\mathcal{H}_j$, $j = \overline{1, k^*+1}$, в точке $\theta \in \mathcal{E}$ мы понимаем размерность линейной оболочки, натянутой на ковекторы $\omega_{1,\theta}^j, \ldots, \omega_{k_j,\theta}^j$. Обозначим ее через $\dim \mathcal{H}_j|_\theta$.

Точку $\theta \in \mathcal{E}$ будем называть *$\mathcal{H}$–регулярной*, если в некоторой окрестности этой точки для любого $j = \overline{s+1, k^*+1}$ модуль $\mathcal{H}_j$ имеет постоянную размерность.

Теорема 4.1. В окрестности $\mathcal{H}$–регулярной точки

(a) существует такое натуральное $j^* \le k^*$, что $\mathcal{H}_{j^*+1} = \mathcal{H}_{j^*}$;

(b) $\mathcal{H}_\infty = \mathcal{H}_{j^*} = \operatorname{span}_{\mathcal{F}}\{dt, dg_1, \ldots, dg_\rho\}$,

где $g_1, \ldots, g_\rho$ — максимальный набор функционально независимых первых интегралов системы (2.3).

Доказательство (a). Так как для всех $j = \overline{1, k^*+1}$ мы имеем вложение $\mathcal{H}_{j+1} \subset \mathcal{H}_j$, то в каждой точке $\theta \in \mathcal{E}$ размерность модуля $\mathcal{H}_j$ не возрастает с ростом j. Обозначим через i такое максимальное натуральное число, что $\dim \mathcal{H}_{j+1}|_\theta < \dim \mathcal{H}_j|_\theta$ при $j = \overline{s+1, i}$. Тогда $\dim \mathcal{H}_{s+1}|_\theta - \dim \mathcal{H}_{i+1}|_\theta \ge i - s$. С другой стороны, в работе [7] (см. лемму 1 там) для $j = \overline{1, s}$ было доказано равенство

$$\mathcal{H}_j = \mathcal{H}_{j+1} \oplus \operatorname{span}_{\mathcal{F}}\{du_1^{(s-j)}, \ldots, du_m^{(s-j)}\}.$$

Поэтому $\dim \mathcal{H}_{s+1}|_\theta = \dim \mathcal{H}_1|_\theta - ms$. Количество элементов базиса модуля $\mathcal{H}_1$, а значит, и его размерность в любой точке равна $1 + k_1 + \ldots + k_p + ms = k^* + (m-1)s - 1$. Таким образом,

$$k^* - s - 1 = \dim \mathcal{H}_{s+1}|_\theta \ge \dim \mathcal{H}_{s+1}|_\theta - \dim \mathcal{H}_{i+1}|_\theta \ge i - s,$$

откуда $i \le k^* - 1$. Следовательно, для любой точки $\theta \in \mathcal{E}$ существует такой номер $j^* \le k^*$, что модули $\mathcal{H}_{j^*+1}$ и $\mathcal{H}_{j^*}$ имеют одинаковую размерность. В окрестности $\mathcal{H}$–регулярной точки θ модули $\mathcal{H}_{j^*+1}$ и $\mathcal{H}_{j^*}$ имеют постоянную размерность, а значит, $\mathcal{H}_{j^*+1} = \mathcal{H}_{j^*}$ в окрестности этой точки.

Доказательство (b) можно найти в [8].

Система (4.1) удовлетворяет *ранговому условию управляемости*, если $\mathcal{H}_\infty = \operatorname{span}_{\mathcal{F}}\{dt\}$.

Теорема 4.2. Если система (4.1) управляема на множестве D, то она не имеет первых интегралов и удовлетворяет ранговому условию управляемости. Если система (4.1) не удовлетворяет ранговому условию управляемости, то она имеет первые интегралы в окрестности любой $\mathcal{H}$–регулярной точки.

Пример 4.1.

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \ln(x_2^3 + 2x_1) + x_2^2 u.$$

4.3. Достаточные условия достижимости и управляемости

Теорема 4.3. Если в точке x_0 система (4.1) удовлетворяет ранговому условию управляемости, а $(x_*(t), u_*(t))$ — решение этой системы и $x_*(t_0) = x_0$, то существует такое $\Delta > 0$ и окресность $V \subset M$ точки $x_*(t_0 + \Delta)$, что V достижимо из точки x_0.

Теорема 4.4. Если система (4.1) удовлетворяет ранговому условию управляемости, $(x_*(t), u_*(t))$ — ее периодическое решение, $x_*(t_0 + T) = x_*(t_0)$ для некоторого $T > 0$, то существует окрестность кривой $x = x_*(t), t \in [t_0, t_0 + T]$, в которой система (4.1) управляема.

Задача: проверить ранговое условие управляемости для системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \ln(x_2^3 + 2x_1) + x_2^2 u.$$

4.4. Наблюдаемость систем

Система с входом и выходом

$$\dot{x} = f(x, u(t)), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n,\ u \in U \subset \mathbb{R}^m, \tag{4.5}$$

$$y = h(x), \quad y \in \mathbb{R}^p, \tag{4.6}$$

наблюдаема, если ее функцию состояния $x(t)$ можно восстановить по результатам измерения функции выхода $y(t)$.

Неполная наблюдаемость: можно восстановить часть компонентов вектора состояния.

Пусть V — подмножество множества D допустимых состояний. Состояние $a \in V$ называют *неотличимым* в V от состояния $b \in V$, если

$$\begin{array}{l} \forall t \in [t_0, T] \quad x_*(t) \in V, \quad x_\#(t) \in V, \quad u(t) \in U \\ \dot{x}_*(t) = f(x_*(t), u(t)), \quad x_*(t_0) = a, \quad y_*(t) = h(x_*(t)) \\ \dot{x}_\#(t) = f(x_\#(t), u(t)), \quad x_\#(t_0) = b, \quad y_\#(t) = h(x_\#(t)) \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} \forall t \in [t_0, T] \\ y_*(t) = y_\#(t). \end{array}$$

Систему (4.5)-(4.6) называют *локально наблюдаемой* в области $M \times U$, если любая точка $a \in M$ имеет окрестность, в которой нет неотличимых от a состояний.

Теорема 4.5. (Локальные условия наблюдаемости.) Система (4.5)-(4.6) локально наблюдаема в области $M \times U$ $\Leftrightarrow$ в любой точке $(x, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(n-2)})$ области $M \times U \times \mathbb{R}^{m(n-2)}$ имеем

$$\operatorname{rang}\left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial D(h)}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial D^{n-1}(h)}{\partial x}\right) = n, \tag{4.7}$$

где

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + f(x, u)\frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i=0}^{n-2} u^{(i+1)} \frac{\partial}{\partial u^{(i)}}$$

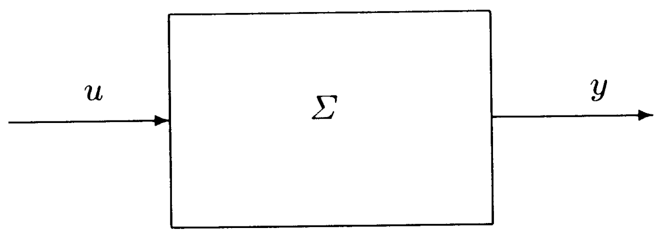
— производная в силу системы (4.5).

5. ОБРАТИМЫЕ СИСТЕМЫ

5.1. Обратимые отображения вход–выход

Рассмотрим систему Σ с входом (u), выходом (y) и заданным начальным значением $x(t_0)$:

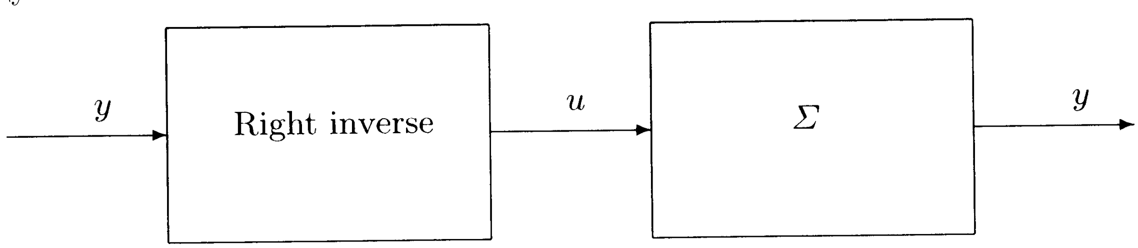
$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = f(x,u), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m, \\ y = h(x), \quad y \in \mathbb{R}^p, \end{cases}$$
$$x(t_0) = x_0.$$



Систему

$$R: \begin{cases} \dot{z} = F(z, y, \dot{y}, \dots, y^{(l)}), \\ u = H(z, y, \dot{y}, \dots, y^{(l)}) \end{cases}$$

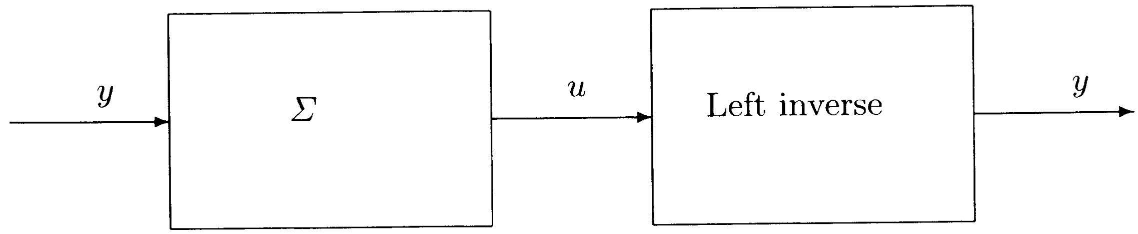
называют *правой обратной* для системы Σ, если существует такое $z(t_0)$, что выход $y(t)$ системы Σ равен входу $y(t)$ системы R в случае, когда вход $u(t)$ системы Σ выбран равным выходу R.



Систему

$$L: \begin{cases} \dot{z} = F(z, y, \dot{y}, \dots, y^{(l)}), \\ u = H(z, y, \dot{y}, \dots, y^{(l)}) \end{cases}$$

называют *левой обратной* для системы Σ, если существует такое $z(t_0)$, что выход $u(t)$ системы L равен входу $u(t)$ системы Σ в случае, когда вход $y(t)$ системы L выбран равным выходу Σ.



Далее мы будем использовать геометрический язык и следующие понятия базиса и размерности модулей дифференциальных 1–форм. Пусть U — открытое подмножество многообразия M, E — подмодуль модуля дифференциальных 1–форм на M. Набор 1–форм $\omega_1, \ldots, \omega_k$ называется *базисом модуля* E в U, если в каждой точке $\vartheta \in U$ ковекторы $\omega_{1,\vartheta}, \ldots, \omega_{k,\vartheta}$ образуют базис линейного пространства $E_\vartheta = \{\omega_\vartheta \in T^*_\vartheta M \,|\, \omega \in E\}$. Под *размерностью* подмодуля E *в точке* $\vartheta \in M$ мы понимаем размерность пространства ковекторов E_ϑ. Через $\dim E$ мы обозначаем целочисленную функцию на M, значение которой в точке ϑ есть размерность E в ϑ.

Обозначим через $\mathcal{E}$ область пространства с координатами $t, x, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}$, где определена система Σ, а через $\mathcal{F}$ — кольцо гладких функций на $\mathcal{E}$. Рассмотрим на $\mathcal{E}$ векторное поле

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} f_j(t,x,u)\frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{l=0}^{n-1} u_i^{(l+1)}\frac{\partial}{\partial u_i^{(l)}}.$$

Для функций (дифференциальных форм) на $\mathcal{E}$, независящих от $u^{(n)}$, производная Ли вдоль D совпадает с производной в силу системы Σ. Переменные состояния x_i, входа u_j и выхода y_l, а также их производные до порядка n в силу системы Σ мы понимаем как функции на $\mathcal{E}$. Производные порядка выше n функций x_i, u_j, y_l мы не будем далее рассматривать. Для функции (дифференциальной 1–формы) g через $g^{(j)}$ будем обозначать ее производную порядка j вдоль векторного поля D: $g^{(j)} = D^j(g)$. В частности, $g^{(0)} = g, g^{(1)} = \dot g$ и т.д.

Рассмотрим следующие модули дифференциальных 1–форм на $\mathcal{E}$:

$$\begin{aligned} E_0 &= \operatorname{span}_{\mathcal{F}}\{dx\}, \quad E_1 = \operatorname{span}_{\mathcal{F}}\{dx, d\dot y\}, \ \ldots, \ E_n = \operatorname{span}_{\mathcal{F}}\{dx, d\dot y, \ldots, dy^{(n)}\}, \\ Y_0 &= \operatorname{span}_{\mathcal{F}}\{dy\}, \quad Y_1 = \operatorname{span}_{\mathcal{F}}\{dy, d\dot y\}, \ \ldots, \ Y_n = \operatorname{span}_{\mathcal{F}}\{dy, d\dot y, \ldots, dy^{(n)}\}. \end{aligned}$$

Здесь и далее через dx, dy и т.д. мы обозначаем наборы $dx = (dx_1, \ldots, dx_n)$, $dy = (dy_1, \ldots, dy_p)$ и т.д. Рассматриваемые наборы форм (или функций) мы понимаем, в зависимости от ситуации, или как множества, или как столбцы.

Точку $\theta \in \mathcal{E}$ будем называть *регулярной точкой* системы Σ, если в некоторой окрестности этой точки $\det(\partial f/\partial u) \neq 0$ и для $k = \overline{0,n}$ модули E_k и Y_k имеют постоянную размерность. В окрестности регулярной точки числа

$$\sigma_k = \dim E_k - \dim E_{k-1}, \quad k = \overline{1,n},$$

называют *структурными коэффициентами*, а $\rho = \sigma_n$ — *рангом системы* Σ.

На используемом нами геометрическом языке критерий обратимости справа систем формулируется следующим образом.

Теорема 5.1. В окрестности регулярной точки система Σ обратима справа тогда и только тогда, когда ее ранг равен размерности модуля Y_0.

Как правило, рассматривают случай, когда функции выхода $h_1(x), \dots, h_p(x)$ функционально независимы. В этом случае условие обратимости справа из теоремы 5.1 выглядит, как $\rho = p$.

Структурные коэффициенты системы и обратная система для нее могут быть вычислены с помощью, так называемого, структурного алгоритма. Приведенный ниже вариант этого алгоритма позволяет вычислять нормальные формы систем, а затем их обращать.

5.2. Системы нормального вида

В случае $m \le p$ *системой нормального вида* отображения вход–выход будем называть систему вида

$$\begin{aligned} y_i^{(n_i)} &= f_i(\tilde{y}, u), \quad i = \overline{1, m}, \\ y_{m+j}^{(n_{m+j})} &= g_j(\tilde{y}), \quad j = \overline{1, p-m}, \\ \dot{\eta}_l &= \varphi_l(\tilde{y}, \eta, u), \quad l = \overline{1, n_1}, \end{aligned}$$

где $y = (y_1, \dots, y_p)$ — выход, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{n_1})$ — ненаблюдаемая часть переменных состояния, $\tilde{y} = (y_1, \dots, y_1^{(n_1-1)}, y_2, \dots, y_p^{(n_p-1)})$, $\det(\partial f / \partial u) \ne 0$.

Алгоритм построения нормальной формы для системы Σ с $m \le p$ состоит из 3 этапов.

На **этапе 1** множество функций выхода y в окрестности регулярной точки $\vartheta \in \mathcal{E}$ последовательно разбивается на непересекающиеся подмножества $y_{[0]}, y_{(1)}, y_{[1]}, \dots, y_{(\varkappa)}, y_{[\varkappa+1]}$ следующим образом.

Шаг 0: Из множества функций y выбираем такое подмножество ζ_0, что $d\zeta_0$ — базис модуля $Y_0 = \mathrm{span}_{\mathcal{F}}\{dy\}$. Остальные функции y включаем в набор $y_{[0]}$. Тогда $y_{[0]} = G_0(\zeta_0)$ — набор функций от ζ_0.

Шаг 1: Из множества функций $\dot{\zeta}_0$ выбираем такие подмножества $v_{(1)}$ и ζ_1, что:
a) $(dx, dv_{(1)})$ — базис модуля $E_1 = \mathrm{span}_{\mathcal{F}}\{dx, d\dot{y}\}$;
b) $(dv_{(1)}, d\zeta_0, d\zeta_1)$ — базис модуля $Y_1 = \mathrm{span}_{\mathcal{F}}\{dy, d\dot{y}\}$.
Обозначаем через $y_{(1)}$ такое подмножество функций y, что $\dot{y}_{(1)} = v_{(1)}$, а набор $y_{[1]}$ составляем из тех компонент ζ_0, производные которых не входят ни в ζ_1, ни в $v_{(1)}$. Тогда $y_{[1]}^{(1)} = G_1(\zeta_0, \zeta_1, v_{(1)})$ — функции от $\zeta_0, \zeta_1, v_{(1)}$.

Шаг k: Из множества функций $\dot{\zeta}_{k-1}$ выбираем такие подмножества $v_{(k)}$ и ζ_k, что:
a) $(dx, dv_{(i)}^{(j)}, i = \overline{1, k}, j = \overline{0, k-i})$ — базис модуля $E_k = \mathrm{span}_{\mathcal{F}}\{dx, d\dot{y}, \dots, dy^{(k)}\}$;
b) $(dv_{(i)}^{(j)}, d\zeta_l, i = \overline{1, k}, j = \overline{0, k-i}, l = \overline{0, k})$ — базис модуля $Y_k = \mathrm{span}_{\mathcal{F}}\{dy, d\dot{y}, \dots, dy^{(k)}\}$.
Обозначаем через $y_{(k)}$ такое подмножество функций y, что k-ая производная $y_{(k)}$ совпадает с $v_{(k)}$, а набор $y_{[k]}$ составляем из тех компонент y, k-ые производные которых входят в $\dot{\zeta}_{k-1}$, но не входят ни в ζ_k, ни в $v_{(k)}$. Тогда $y_{[k]}^{(k)} = G_k(\zeta_l, v_{(i)}^{(j)})$, где $i = \overline{1, k}, j = \overline{0, k-i}, l = \overline{0, k}$.

Этап 1 останавливаем на шаге $\varkappa$, если наборы $v_{(\varkappa+1)}$ и $\zeta_{\varkappa+1}$ пустые. Тогда $y_{[\varkappa+1]}^{(\varkappa)} = \zeta_\varkappa$, $y_{[\varkappa+1]}^{(\varkappa+1)} = G_{\varkappa+1}(\zeta_l, v_{(i)}^{(j)})$, где $l = \overline{0, \varkappa}, i = \overline{1, \varkappa}, j = \overline{0, \varkappa - i}$, а ранг ρ системы Σ равен количеству элементов в наборах $y_{(1)}, \dots, y_{(\varkappa)}$.

Этап 2. Если $Y_\varkappa \ne E_\varkappa$, то из множества функций x выбираем такое подмножество η, что набор ковекторов $d\eta_\vartheta$ дополняет базис пространства $Y_{\varkappa,\vartheta}$ до базиса пространства $E_{\varkappa,\vartheta}$.

Если модуль $E_\varkappa$ содержит не все 1–формы набора du, то из множества функций u выбираем такое подмножество $v_\#$, что набор ковекторов $dv_{\#,\vartheta}$ дополняет базис пространства $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{du_\vartheta\} \cap E_{\varkappa,\vartheta}$ до базиса пространства $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{du_\vartheta\}$.

Обозначаем $\tilde{y} = (\zeta_0, \ldots, \zeta_\varkappa) = (y_{[1]}, y_{(1)}, \ldots, y_{[\varkappa]}, y_{(\varkappa)}, y_{[\varkappa+1]}, y^{(1)}_{[2]}, y^{(1)}_{(2)}, \ldots, y^{(\varkappa)}_{[\varkappa+1]})$, $v = (v_{(1)}, \ldots, v_{(\varkappa)}, v_{\#})$ и строим нормальную форму

$$\begin{aligned} y^{(j)}_{(j)} &= v_{(j)}, \quad j = \overline{1, \varkappa}, \\ y^{(j)}_{[j]} &= G_j(\tilde{y}), \quad j = \overline{1, \varkappa + 1}, \\ \dot{\eta} &= \varphi(\eta, \tilde{y}, v, \dot{v}, \ldots, v^{(\varkappa-1)}). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Этап 3. Находим обратимое преобразование системы Σ в нормальную форму (5.1):

$$\begin{aligned} &y = h(x), \quad y^{(j)}_{(i)} = h^{(j)}_{(i)}(x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(j-1)}), \quad y^{(j)}_{[i]} = h^{(j)}_{[i]}(x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(j-1)}), \\ &\eta = \eta(x), \quad v_{(i)} = h^{(i)}_{(i)}(x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(i-1)}), \quad v_{\#} = v_{\#}(u), \quad i = \overline{1, \varkappa + 1}, \quad j = \overline{1, i-1}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

где $v_{(\varkappa+1)}$ и $y_{(\varkappa+1)}$ — пустые наборы.

Замечание. В случае $p = \rho$ переменные $y_{[1]}, \ldots, y_{[\varkappa+1]}$ и вторая группа уравнений системы (5.1) отсутствуют. В случае же $p < \rho$ переменные выхода не произвольны, а связаны указанными уравнениями системы (5.1).

Данный алгоритм содержит несколько утверждений, требующих доказательства. Теоретическим обоснованием этого алгоритма является следующая теорема.

Теорема 5.2. В окрестности регулярной точки $\vartheta \in \mathcal{E}$ системы Σ каждый шаг приведённого алгоритма осуществим и результатом его применения является нормальная форма (5.1) и обратимое преобразование (5.2).

Доказательство этой теоремы и метод выделения функций $v_{(k)}, \zeta_k$ основаны на следующих двух леммах.

Лемма о дополнении. Если в окрестности точки $\theta \in M$ многообразия M модуль $E = \operatorname{span}_{C^\infty(M)}\{dz_1, \ldots, dz_\alpha\}$ имеет постоянную размерность, $\omega_1, \ldots, \omega_s \in E$, а ковекторы $\omega_{1,\theta}, \ldots, \omega_{s,\theta}$ линейно независимы, то существуют такие индексы $l_1, \ldots, l_p$ $(1 \le l_i \le \alpha)$, что в некоторой окрестности точки $\theta \in M$ набор $(\omega_1, \ldots, \omega_s, dz_{l_1}, \ldots, dz_{l_p})$ есть базис модуля E.

Лемма о функциональной зависимости. Пусть $g, z_1, \ldots, z_s$ — гладкие функции на многообразии M, $\theta \in M$,
(1) $dg \in \operatorname{span}_{C^\infty(M)}(dz_1, \ldots, dz_s)$;
(2) ковекторы $dz_{1,\theta}, \ldots, dz_{s,\theta}$ линейно независимы.
Тогда существует такая функция Φ s переменных, что $g = \Phi(z_1, \ldots, z_s)$ в окрестности точки θ.

Теорема 5.3. При $p = \rho$ система (5.1) обратима справа, обратная к ней есть система

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \varphi(\eta, \tilde{y}, v, \dot{v}, \ldots, v^{(\varkappa-1)}), \\ v_{(j)} &= y^{(j)}_{(j)}, \quad j = \overline{1, \varkappa}, \end{aligned} \tag{5.3}$$

с входом y и выходом v, где $\tilde{y} = (y_{(1)}, \ldots, y_{(\varkappa)}, y^{(1)}_{(2)}, \ldots, y^{(\varkappa-1)}_{(\varkappa+1)})$.

Для построения обратной системы для системы Σ с $\rho = p$ достаточно
1) привести ее к нормальному виду;
2) применить теорему 5.3;
3) используя обратное преобразование к преобразованию (5.2), найти зависимость $u = U(\eta, \tilde{y}, v)$.
Тогда обратная система есть система

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \varphi(\eta, \tilde{y}, v, \dot{v}, \ldots, v^{(\varkappa-1)}), \\ u &= U(\eta, \tilde{y}, v), \end{aligned} \tag{5.4}$$

где $v = (y_{(1)}^{(1)}, \dots, y_{(\varkappa)}^{(\varkappa)}, v_{\#})$.

При $\rho = m$ система (5.4) обратная слева к системе Σ.

6. МИНИМАЛЬНЫЕ РЕАЛИЗАЦИИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

6.1. Минимальные реализации линейных систем

В теории линейных стационарных систем есть понятие минимальной реализации. При $m = 1$, $p = 1$ уравнение отображения вход – выход для таких систем имеет вид

$$y^{(k)} + a_{k-1}y^{(k-1)} + \ldots + a_0 y = b_s u^{(s)} + b_{s-1}u^{(s-1)} + \ldots + b_0 u, \quad a_{k-1}, \ldots, a_0, b_s, \ldots, b_0 \in \mathbb{R}, \tag{6.1}$$

и полностью характеризуется его передаточной функцией, которая является дробно – рациональной функцией своего аргумента:

$$Y(q) = \frac{B(q)}{A(q)}, \qquad A(q) = q^k + a_{k-1}q^{k-1} + \ldots + a_0, \quad B(q) = b_s q^s + b_{s-1}q^{s-1} + \ldots + b_0.$$

Многочлены $A(q)$ и $B(q)$ могут иметь совпадающие нули, а значит, общие делители: $A(q) = E(q)A_0(q)$, $B(q) = E(q)B_0(q)$. В этом случае, сокращая общие делители числителя и знаменателя передаточной функции, получают приведенную (редуцированную) передаточную функцию $Y_0(q) = \frac{B_0(q)}{A_0(q)}$. Дифференциальное уравнение, соответствующее редуцированной передаточной функции (без общих делителей числителя и знаменателя), называют редуцированным уравнением отображения вход – выход или редукцией уравнения (6.1). Такое уравнение имеет реализацию, которая является управляемой и наблюдаемой линейной стационарной системой. Ее называют минимальной реализацией уравнения (6.1) отображения вход – выход.

Определения редукции и минимальной реализации в нелинейном случае мотивируются следующими соображениями. Пусть введенные выше многочлены имеют вид

$$E(q) = q^\alpha + e_{\alpha-1}q^{\alpha-1} + \ldots + e_0, \quad A_0(q) = q^\beta + a^0_{\beta-1}q^{\beta-1} + \ldots + a^0_0, \quad B_0(q) = b^0_\gamma q^\gamma + \ldots + b^0_0.$$

Обозначим

$$g = y^{(\beta)} + a^0_{\beta-1}y^{(\beta-1)} + \ldots + a^0_0 y - b^0_\gamma u^{(\gamma)} - \ldots - b^0_0 u.$$

Тогда редукция уравнения (6.1) представляется в виде $g = 0$, а само уравнение (6.1) — в виде

$$\left(\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} + e_{\alpha-1}\frac{d^{\alpha-1}}{dt^{\alpha-1}} + \ldots + e_0\right)(g) = 0. \tag{6.2}$$

Отметим, что уравнение (6.1) и его минимальная реализация не эквивалентны. Действительно, редукция $g = 0$ уравнения (6.1) не эквивалентна уравнению (6.2), так как среди решений уравнения (6.2) есть решения, для которых $g \not\equiv 0$. С другой стороны, редукция эквивалентна минимальной реализации, а уравнение (6.2) — уравнению (6.1).

Уравнение (6.1) и его редукция $g = 0$ вместе с нулевыми начальными условиями

$$y(0) = \dot{y}(0) = \ldots = y^{(k-1)}(0) = 0 \tag{6.3}$$

определяют отображения входа в выход. Эти отображения различны, так как существуют такие решения уравнения (6.2), которые удовлетворяют начальным условиям (6.3), но не удовлетворяют уравнению $g = 0$.

Однако если рассматривать уравнение (6.1) и его редукцию $g = 0$ вместе с нулевыми начальными условиями и на y, и на u:

$$y(0) = \dot{y}(0) = \ldots = y^{(k-1)}(0) = 0, \quad u(0) = \ldots = u^{(s-1)}(0) = 0. \tag{6.4}$$

то их множество решений будет совпадать, так как для всех таких решений $g \equiv 0$. Действительно, пусть $(y(t), u(t))$ — какое–либо решение уравнения (6.1), удовлетворяющее начальным условиям (6.4), $g(t)$ — значение функции g на этом решении. Уравнение (6.1) представляется в виде (6.2), а значит, g — решение этого уравнения, причем $g(0) = 0$, так как решение $(y(t), u(t))$ удовлетворяет начальным условиям (6.4). Из теоремы единственности решения задачи Коши для линейного уравнения получаем $g \equiv 0$.

Таким образом, уравнение (6.1) и его минимальная реализация задают разные отображения вход – выход, если расматривать начальные условия только на y, и одинаковые отображения вход – выход, если расматривать нулевые начальные условия и на y, и на u (для уравнения (6.1) — условия (6.4), для минимальной реализации — им соответствующие). Кроме того, если уравнение (6.1) имеет редукцию, то $\alpha > 0$ в (6.2), и тогда $dg \in \mathcal{H}_\infty$ по определению $\mathcal{H}_\infty$. В случае $\alpha = 0$ реализация уравнения (6.1) является минимальной, для такого уравнения $\mathcal{H}_\infty = \operatorname{span}_{\mathcal{F}}\{dt\}$, и по теореме 4.1 оно не имеет первых интегралов.

6.2. Минимальные реализации нелинейных систем

Перейдем к общему (нелинейному) случаю. Напомним, что система (2.3) и ее реализация (2.4)–(2.5) определяют выход по входу при условии задании начальных значений выхода и переменных состояния соответственно. Обычно система (2.3) и ее реализация (2.4)–(2.5) рассматривается в окрестности какого–либо решения. В этом случае начальные значения выхода и переменных состояния определяются этим решением (в линейном случае — это нулевое положение равновесия).

Рассмотрим отображение вход – выход, заданное системой (2.3) и начальными условиями

$$y_\alpha^{(l)}(t_0) = y_{\alpha,0}^{(l)}, \quad u_\beta^{(k)}(t_0) = u_{\beta,0}^{(k)}, \qquad \alpha = \overline{1,p}, \quad l = \overline{0, k_\alpha - 1}, \quad \beta = \overline{1,m}, \quad k = \overline{0, s-1}. \tag{6.5}$$

Предположим, это же отображение задается другой системой вида (2.3) с теми же начальными условиями, но меньшего порядка. Тогда вторую систему называют *редуцированной системой* или *редукцией* системы (2.3) отображения вход – выход с данными начальными условиями.

Минимальной реализацией системы (2.3) отображения вход – выход с начальными условиями (6.5) называют систему вида (2.4)–(2.5), которая не имеет первых интегралов и задает с учетом начальных условий на переменные $x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(s-1)}$ то же самое отображение вход – выход.

Отметим, что минимальная реализация системы может не быть ее реализацией, так как в случае реализации эквивалентны множества всех решений систем (2.3) и (2.4), а в случае минимальной реализации эквивалентны множества только тех решений этих систем, которые удовлетворяют заданным начальным условиям.

Минимальная реализация системы строится методом удаления первых интегралов.

Алгоритм вычисления минимальной реализации.

1. Среди чисел от 1 до $s+1$ находим максимальное k, для которого модуль $\mathcal{H}_k$ имеет базис из точных 1-форм.
2. Выбираем базис модуля $\mathcal{H}_k$ вида $\{dt, dg_1, \ldots, dg_\rho, dx_1, \ldots, dx_n\}$, где $g_1, \ldots, g_\rho$ — максимальный набор функционально независимых первых интегралов системы (2.3).

3. Находим систему вида (2.4)–(2.5), которой удовлетворяют функции $x_1, \ldots, x_n$. Для этого производные в силу системы (2.3) этих функций и переменные выхода $y_1, \ldots, y_p$ выражаются через $t, x, g, u, \dot{u}, \ldots, u^{(r_0)}$. После этого в полученных выражениях переменные $g = (g_1, \ldots, g_\rho)$ заменяются на те значения соответствующих первых интегралов, которые определяются начальными условиями (6.5).
4. Если посторенная система вида (2.4) не обладает первыми интегралами, то в совокупности с выражениями (2.5) и начальными условиями на переменные x, которые определяются начальными условиями (6.5), она представляет собой искомую минимальную реализацию. Если же посторенная система имеет первые интегралы, то повторяем шаги 1–3 применительно к этой системе. Для вычисления первых интегралов системы (2.4) можно применить теорему 4.1. Шаги 1–3 могут повторяться только конечное число раз, так как каждое повторение уменьшает порядок системы.

Необходимо дать теоретическое обоснование этого алгоритма, т.е. показать, что каждый его шаг разрешим и результатом применения алгоритма является минимальная реализация системы. Мы сделаем это в случае существования реализации вида (2.1)–(2.5).

Теорема 6.1. Пусть в окрестности $\mathcal{H}$–регулярной точки $\theta \in \mathcal{E}$ уравнения (2.3) отображения вход – выход имеют реализацию вида (2.1)–(2.5), а

$$t_0,\ y^{(l)}_{\alpha,0},\ u^{(k)}_{\beta,0}, \qquad \alpha = \overline{1,p}, \quad l = \overline{0, k_\alpha - 1}, \quad \beta = \overline{1,m}, \quad k = \overline{0, k^* + s - 1},$$

— координаты точки θ. Предположим также, что системы вида (2.4), которые получаются в процессе применения приведенного алгоритма, обладают свойством $\mathcal{H}$–регулярности в точках, соответствующих θ. Тогда в некоторой окрестности точки θ каждый шаг приведенного алгоритма разрешим и результатом его применения является минимальная реализация системы (2.3) с начальными условиями (6.5).

Доказательство. Из п. (a) теоремы 3.1 следует, что модуль $\mathcal{H}_{s+1}$ в окрестности точки θ имеет базис вида $\{d\xi_0, \ldots, d\xi_d\}$. А значит, шаг 1 алгоритма дает $k = s + 1$.

Из п. (b) теоремы 4.1 следует, что в окрестности точки θ модуль $\mathcal{H}_\infty$ имеет базис вида $\{dt, dg_1, \ldots, dg_\rho\}$, где $g_1, \ldots, g_\rho$ — максимальный набор функционально независимых первых интегралов системы (2.3). Так как $\mathcal{H}_\infty \subset \mathcal{H}_{s+1}$ (см. этап 1° доказательства п. (b) теоремы 4.1), то $dg = A d\xi$, где dg и $d\xi$ — столбцы наборов 1–форм $dt, dg_1, \ldots, dg_\rho$ и $d\xi_0, \ldots, d\xi_d$ соответственно, а A — матрица функций. Ранг матрицы A в окрестности точки θ максимален и равен $\rho + 1$, так как 1–формы $dt, dg_1, \ldots, dg_\rho$ линейно независимы. Рассмотрим матрицу A в точке θ и какой–либо ее базисный минор в этой точке. Обозначим через $x_1, \ldots, x_\mu$ те функции набора $\xi_0, \ldots, \xi_d$, которые соответствуют небазисным столбцам. Тогда 1–формы $dt, dg_1, \ldots, dg_\rho, dx_1, \ldots, dx_\mu$ линейно независимы в точке θ, а значит, и в некоторой окрестности θ. Так как размерность модуля $\mathcal{H}_{s+1}$ постоянна в окрестности точки θ и равна $\mu + \rho + 1$, то указанный набор 1–форм образует базис модуля $\mathcal{H}_{s+1}$. Поэтому шаг 2 также разрешим.

В качестве компонент векторной функции (3.1), которая определяет переход к реализации вида (2.1)–(2.5), можно взять функции, дифференциалы которых вместе с dt образуют базис $\mathcal{H}_{s+1}$. В данном случае это функции $g_1, \ldots, g_\rho, x_1, \ldots, x_\mu$. Так как $g_1, \ldots, g_\rho$ — первые интегралы, то

$$\dot{g}_j = 0, \quad j = \overline{1, \rho}. \tag{6.6}$$

Остальные уравнения системы (2.1) имеют вид

$$\dot{x}_i = f_i(t, g, x, u), \quad i = \overline{1, \mu}. \tag{6.7}$$

Так как любой элемент $\mathcal{H}_{s+1}$ по определению лежит в $\mathcal{H}_1$, а значит, есть линейная комбинация базисных для $\mathcal{H}_1$ 1–форм, то функции $g_1, \ldots, g_\rho, x_1, \ldots, x_\mu$ зависят только от переменных (4.4). Поэтому начальные условия (6.5) преобразуются в начальные условия

$$g_j(t_0) = g_{j,0}, \quad j = \overline{1, \rho}, \tag{6.8}$$

$$x_i(t_0) = x_{i,0}, \quad u_\beta^{(k)}(t_0) = u_{\beta,0}^{(k)}, \qquad i = \overline{1, \mu}, \quad \beta = \overline{1, m}, \quad k = \overline{0, s-1}, \tag{6.9}$$

где $g_{j,0}, x_{i,0}$ — значения функций g_j, x_i в точке θ. Из уравнений (6.6) следует, что функции $g_1, \ldots, g_\rho$ постоянны вдоль каждого решения системы (2.3). Поэтому на всех решениях системы (2.3), удовлетворяющих начальным условиям (6.5), функции g_j принимают значения (6.8). А значит, для описания всех таких решений достаточно рассмотреть систему, которая получается из системы (6.7) заменой $g_1, \ldots, g_\rho$ на их значения в точке θ. В выражениях (2.5) переменные $g_1, \ldots, g_\rho$ также заменяются на эти значения. Это доказывает разрешимость шага 3.

Так как система (6.6)–(6.7) является реализацией системы (2.3), то она ей эквивалентна. А значит полученная из нее система задает с учетом начальных условий (6.9) то же самое отображение вход – выход, что и система (2.3) с начальными условиями (6.5). Поэтому если система (6.7) с постояными g не имеет первых интегралов, то она в совокупности с выражениями (2.5) и начальными условиями (6.9) является минимальной реализацией.

Если же система (6.7) с постояными g имеет первые интегралы, то она в совокупности с выражениями (2.5) представляет собой свою реализацию требуемого вида, а значит, условия теоремы выполняются и для этой системы. Как только что мы доказали, шаги 1–3 могут быть повторены. Это завершает доказательство теоремы.

Пример 1. Найдем минимальную реализацию отображения входа в выход, заданного системой

$$\ddot{y}_1 = y_2 + u_1 y_2 + u_2, \quad \ddot{y}_2 = 2y_2\dot{y}_1 + 2u_1 y_2 \dot{y}_1 - 2\dot{u}_2 y_1.$$

Имеем $k_1 = k_2 = 2, s = 1$, а $g = \dot{y}_1^2 - \dot{y}_2 - 2u_2 y_1$ — первый интеграл системы. Минимальная реализация есть система

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3 + u_1 x_3 + u_2, \quad \dot{x}_3 = x_2^2 - 2u_2 x_1$$

с выходом

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_3.$$

7. ДИНАМИЧЕСКИ ЛИНЕАРИЗУЕМЫЕ И ПЛОСКИЕ СИСТЕМЫ

7.1. Понятие динамической обратной связи

Рассмотрим систему с управлением вида

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m. \tag{7.1}$$

Динамической обратной связью системы (7.1) называют обратную связь вида

$$\dot{\xi} = a(t, x, \xi, v), \quad u = b(t, x, \xi, v), \quad \xi \in \mathbb{R}^d,\ v \in \mathbb{R}^m, \tag{7.2}$$

с состоянием ξ, входом (x, v) и выходом u. Область пространства с координатами t, x, ξ, v, где определены функции a и b, называют *областью определения*, а число d — *размерностью динамической обратной связи* (7.2).

Динамическую обратную связь (7.2) можно понимать как преобразование системы (7.1) в систему

$$\dot{x} = f\big(t, x, b(t, x, \xi, v)\big), \qquad \dot{\xi} = a(t, x, \xi, v) \tag{7.3}$$

с состоянием $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{n+d}$ и управлением (входом) v. Второе равенство в (7.2) определяет отображение из множества решений системы (7.3) в множество решений системы (7.1).

Алгоритм построения динамической обратной связи, преобразующей систему в нормальную форму.

1. Для системы Σ с $m = p = \rho$ строим нормальную форму

$$\begin{aligned} y_{(j)}^{(j)} &= v_{(j)}, \quad j = \overline{1, \varkappa}, \\ \dot{\eta} &= \varphi(\eta, \tilde{y}, v, \dot{v}, \dots, v^{(\varkappa-1)}) \end{aligned} \tag{7.4}$$

и обратимое преобразование

$$\begin{aligned} &y = h(x), \quad y_{(i)}^{(j)} = h_{(i)}^{(j)}(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(j-1)}), \\ &\eta = \eta(x), \quad v_{(i)} = h_{(i)}^{(i)}(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(i-1)}), \quad i = \overline{1, \varkappa}, \quad j = \overline{1, i-1}, \end{aligned} \tag{7.5}$$

преобразующее систему Σ в нормальную форму (7.4).

2. Находим обратное преобразование к преобразованию (7.5). Можно показать, что функция φ из системы (7.4) зависит только от $\eta, \hat{y} = (y, \dot{y}, \dots, y^{(\varkappa-1)})$ и $w = y^{(\varkappa)}$, при этом $\tilde{y}, v_{(1)}, \dots, v_{(\varkappa-1)}$ — подмножества набора $\hat{y}$, $v_{(\varkappa)}$ — подмножество набора w, а обратное преобразование имеет вид

$$x = X(\eta, \hat{y}), \quad u = U(\eta, \hat{y}, w). \tag{7.6}$$

3. Выбираем функции $\xi_1, \dots, \xi_d$ переменных $\eta, \hat{y}$ так, чтобы матрица Якоби $\partial(\xi, x)/\partial(\eta, \hat{y})$ была квадратной и невырожденной.

4. Выражаем производные $\dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_d$ этих функций в силу системы (7.4) через $\eta, \hat{y}$ и w.

5. В полученных выражениях для $\dot\xi_1, \dots, \dot\xi_d$ и $u_1, \dots, u_m$ переходим от переменных $\eta, \hat y, w$ к переменным ξ, x, w. Получаем динамическую обратную связь

$$\dot\xi = a(x, \xi, w), \quad u = b(x, \xi, w), \tag{7.7}$$

которая в совокупности с (7.6) преобразует систему Σ в нормальную форму

$$\begin{aligned} y^{(\varkappa)} &= w, \\ \dot\eta &= \varphi(\eta, \hat y, w). \end{aligned}$$

Говорят, что система (7.1) *линеаризуема динамической обратной связью* (7.2) (или просто *динамически линеаризуема*), если получающаяся с помощью этой связи система (7.3) преобразуется в эквивалентную систему вида

$$y_i^{(n_i)} = v_i, \quad i = 1, \dots, m, \tag{7.8}$$

обратимой заменой переменных вида

$$t = t, \quad \tilde y = \tilde Y(t, x, \xi), \quad v = v,$$

где $\tilde y = (y_1, \dot y_1, \dots, y_1^{(n_1-1)}, y_2, \dots, y_m^{(n_m-1)})$ — состояние системы (7.8). В случае $d = 0$, т.е. когда ξ отсутствует, определение динамической линеаризуемости эквивалентно определению статической линеаризуемости.

Теорема 7.1.
1. Если система приводится к каноническому виду, то она динамически линеаризуема.
2. В случае одномерного управления ($m = 1$) система динамически линеаризуема тогда и только тогда, когда она приводится к каноническому виду.

В случае $m > 1$ существуют системы, которые динамически линеаризуемы, но не приводятся к каноническому виду.

Пример 7.1. Система

$$\begin{aligned} \dot x &= u\cos\theta, \\ \dot y &= u\sin\theta, \\ \dot\theta &= \frac{u}{l}\operatorname{tg}\varphi \end{aligned} \tag{7.9}$$

не приводится к каноническому виду. Однако она динамически линеаризуема динамической обратной связью

$$\begin{aligned} \dot\xi &= v_1\cos\theta + v_2\sin\theta, \\ u &= \xi, \\ \varphi &= \operatorname{arctg}\frac{l(v_2\cos\theta - v_1\sin\theta)}{\xi^2}. \end{aligned}$$

Получающаяся с помощью этой динамической обратной связи система вида (7.3) заменой переменных $y_1 = x,\ y_2 = y$ преобразуется в эквивалентную систему $\ddot y_1 = v_1, \ddot y_2 = v_2$. ▷

Задача 7.1 Докажите, что система (7.9) не приводится к каноническому виду.

7.2. Плоские системы

Пусть l — некоторое неотрицательное целое. Считая переменные

$$t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ u_1,\ \ldots,\ u_m,\ \dot{u}_1,\ \ldots,\ \dot{u}_m,\ \ddot{u}_1,\ \ldots,\ u_m^{(l)}$$

независимыми, рассмотрим пространство с такими координатами. Пусть $\mathcal{O}^{(l)}$ — область этого пространства. Система (7.1) называется *плоской* в области $\mathcal{O}^{(l)}$, если на $\mathcal{O}^{(l)}$ определены такие функции

$$y_1 = h_1(t, x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(l)}), \quad \ldots, \quad y_r = h_r(t, x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(l)}), \tag{7.10}$$

что переменные x и u выражаются через t, функции (7.10) и их производные в силу системы (7.1) до какого–то конечного порядка, а любой конечный набор функций (7.10), их производных в силу системы (7.1) и функции t функционально независим. При этом набор функций (7.10) называется *плоским* (или *линеаризующим*) *выходом* системы (7.1).

Задача 7.2 Докажите, что система (7.8) плоская с плоским выходом $(y_1, \ldots, y_m)$.

Теорема 7.2. Линейная система плоская тогда и только тогда, когда она управляема.

Доказательство этой теоремы следует из теоремы Бруновского, задачи 7.2 и инвариантности понятия плоской системы.

Теорема 7.3. Регулярная система (7.1), приводящаяся к каноническому виду

$$y_i^{(n_i)} = g_i(t, \tilde{y}, u), \quad i = 1, \ldots, m,$$

заменой переменных

$$t = t, \quad y_i = Y_i(t, x), \quad u_i = u_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

является плоской с плоским выходом $\big(y_1 = Y_1(t, x), \ldots, y_m = Y_m(t, x)\big)$

Задача 7.3 Докажите теорему 7.3, используя определения.

Теорема 7.4. Если регулярная система (7.1) плоская, то ее управление и плоский выход имеют одинаковую размерность ($r = m$), а для любого $i = 1, \ldots, m$ порядок старшей производной функции y_i, входящей в выражение для u, на единицу больше порядка старшей производной y_i из выражения для x:

$$x = X(t, y_1, \dot{y}_1, \ldots, y_1^{(n_1-1)}, y_2, \ldots, y_m^{(n_m-1)}), \tag{7.11}$$
$$u = U(t, y_1, \dot{y}_1, \ldots, y_1^{(n_1)}, y_2, \ldots, y_m^{(n_m)}). \tag{7.12}$$

Задачу проверки, является ли заданный набор функций плоским выходом, решает следующая

Теорема 7.5. Пусть система (7.1) регулярная.

1) Если в области $\mathcal{O}^{(l)}$ существуют такие $r = m$ функций (7.10), что переменные состояния $x_1, \ldots, x_n$ выражаются через t, функции $y_1, \ldots, y_m$ и их производные в силу системы (7.1) до какого-то конечного порядка, то система (7.1) плоская в области $\mathcal{O}^{(l)}$, а функции $y_1, \ldots, y_m$ образуют ее плоский выход.

2) Если векторная функция $y = (y_1, \ldots, y_m)$ вида (7.10) такова, что переменные x состояния системы (7.1) не выражаются через $t, y, \dot{y}, \ldots, y^{(K)}$ при $K = n + (m-1)l - 1$, то x нельзя выразить через $t, y, \dot{y}, \ldots, y^{(k)}$ ни для какого k, т.е. y не является плоским выходом системы (7.1).

Полученную в теореме оценку для K нельзя улучшить. А именно, для любых n, m, l можно построить примеры плоских систем и плоских выходов, для которых K будет равен указанной в теореме оценке.

Пример 7.2. Система (7.9) регулярная и плоская в области $\{u \neq 0\}$ с плоским выходом $y_1 = x$, $y_2 = z$. Плоскостность следует из утверждения 1) теоремы 7.5, так как $u^2 = \dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2$, а при $\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 \neq 0$ имеем

$$x = y_1, \quad z = y_2, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{\dot{y}_2}{\dot{y}_1}, \quad \text{когда} \quad \dot{y}_1 \neq 0, \quad \text{и} \quad \theta = \operatorname{arcctg} \frac{\dot{y}_1}{\dot{y}_2}, \quad \text{когда} \quad \dot{y}_2 \neq 0.$$

Теорема 7.6. Система плоская тогда и только тогда, когда существует такой выход y, что
1) y зависит от x, u и конечного числа производных u;
2) система наблюдаема относительно y;
3) соответствующая система вход-выход обратима справа и слева.

7.3. Построение динамической обратной связи, линеаризующей плоскую систему

Каждое решение системы вида (7.8) однозначно определяется функциями $y_1(t), \ldots, y_m(t)$, которые могут быть выбраны произвольными ($v_i(t) = y_i^{(n_i)}(t)$). Таким образом, соотношения (7.10) при $r = m$ определяют отображение из множества решений системы (7.1) во множество решений системы (7.8). Это отображение есть биекция, если (7.10) – плоский выход системы (7.1). Действительно, сюръективность этого отображения следует из функциональной независимости любого конечного набора функций (7.10), их производных и t, а соотношения (7.11) и (7.12) задают обратное отображение.

Теорема 7.7. Пусть в области $\mathcal{O}^{(l)}$ регулярная система (7.1) плоская с плоским выходом (7.10) и имеет место равенство (7.11). Тогда в окрестности любой точки $\theta_l \in \mathcal{O}^{(l)}$ существует динамическая обратная связь размерности $d = n_1 + \ldots + n_m - n$, которая линеаризует систему (7.1).

Динамическая обратная связь, линеаризующая плоскую систему, может быть построена с помощью следующего **алгоритма**.

Пусть функции (7.10) образуют плоский выход системы (7.1) и выполняются соотношения (7.11).

1. Выберем функции $\xi_1, \ldots, \xi_d$ переменных $t,\ \tilde{y} = (y_1, \dot{y}_1, \ldots, y_1^{(n_1-1)}, y_2, \ldots, y_m^{(n_m-1)})$ так, чтобы матрица Якоби $\partial(\xi, X)/\partial\tilde{y}$ была квадратной и невырожденной.

2. Выразим производные $\dot{\xi}_1, \ldots, \dot{\xi}_d$ этих функций в силу системы (7.1) и функции $u_1, \ldots, u_m$ через $t,\ \tilde{y}$ и $v = (v_1, \ldots, v_m)$, где $v_i = y_i^{(n_i)}$, $i = \overline{1, m}$.

3. В полученных выражениях для $\dot{\xi}_1, \ldots, \dot{\xi}_d$ и $u_1, \ldots, u_m$ перейдем от переменных $t,\ \tilde{y},\ v$ к переменным $t,\ \xi,\ x,\ v$. Получим линеаризующую динамическую обратную связь.

Пример 7.3. Переменные состояния системы (7.9) выражаются через $t,\ \tilde{y} = (y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2)$. Поэтому $n_1 = n_2 = 2$, $d = 1$. Выберем функцию ξ переменных $t,\ \tilde{y}$ так, чтобы переход от переменных $t,\ x,\ z,\ \theta,\ \xi$ к переменным $t,\ \tilde{y}$ был обратим. Положим $\xi = \sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2}$. Тогда $\dot{y}_1$ и $\dot{y}_2$ выражаются через θ и ξ: $\dot{y}_1 = \xi\cos\theta$, $\dot{y}_2 = \xi\sin\theta$. Выразим $\dot{\xi},\ u,\ \varphi$ через $t,\ \tilde{y},\ \ddot{y}_1, \ddot{y}_2$. В случае $u > 0$ получаем:

$$\dot{\xi} = \frac{\ddot{y}_1\dot{y}_1 + \ddot{y}_2\dot{y}_2}{(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2)^{1/2}}, \quad u = \sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{l(\ddot{y}_2\dot{y}_1 - \ddot{y}_1\dot{y}_2)}{(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2)^{3/2}}.$$

Переходя к переменным $t,\ x,\ z,\ \theta,\ \xi,\ v_1 = \ddot{y}_1,\ v_2 = \ddot{y}_2$, получаем линеаризующую динамическую обратную связь

$$u = \xi, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{l}{\xi^2}(v_2\cos\theta - v_1\sin\theta), \quad \dot{\xi} = v_1\cos\theta + v_2\sin\theta$$

с областью определения $\{u \neq 0\}$. Обратное отображение из множества решений системы (7.9) во множество решений линейной системы $\ddot{y}_1 = v_1$, $\ddot{y}_2 = v_2$ имеет вид

$$t = t \quad y_1 = x, \quad y_2 = z, \quad v_1 = \dot{u}\cos\theta - \frac{u^2}{l}\operatorname{tg}\varphi\sin\theta, \quad v_2 = \dot{u}\sin\theta + \frac{u^2}{l}\operatorname{tg}\varphi\cos\theta.$$

Замечание 1. Из соотношений (7.11) и (7.12) следует, что состояние x плоской системы (7.1) выражается через время t и состояние $\tilde{y}$ линейной системы (7.8), а управление u – через $t,\ \tilde{y}$ и управление v системы (7.8). Однако обратное отображение может не обладать этим свойством, т.е. выражения для $\tilde{y},\ v$ могут содержать $t,\ x,\ u$ и производные $\dot{u}, \ldots, u^{(k)}$ до некоторого порядка k. Так, в рассматриваемом выше примере управление (v_1, v_2) линейной системы выражается через состояние θ, управление (u, φ) и производную $\dot{u}$. Таким образом, чтобы представить преобразование плоской системы (7.1) к виду (7.8) как обратимое отображение областей пространств, необходимо рассматривать пространства бесконечной размерности, координатами которых являются время, состояния, управление и все производные управления.

8. МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

8.1. Решение задач терминального управления и стабилизации

Рассмотрим механическую систему, описываемую системой (7.1). Предположим, мы нашли функцию управления $u_*(t)$, которая позволяет нам следовать выбранной траектории $x_*(t)$. Но какие–либо случайные внешние воздействия, не учитываемые системой (7.1), изменили функцию состояния системы на $x(t)$, причем $x(t_0) \neq x_*(t_0)$ в некоторый момент $t = t_0$. В этом случае для возвращения на заданную траекторию $x_*(t)$ управление выбирается как решение *задачи стабилизации*.

В классической формулировке эта задача заключается в поиске такой обратной связи $u = U(t,x)$, что $x = x_*(t)$ есть асимптотически устойчивое решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{x} = f\big(t, x, U(t,x)\big)$. *Динамический* вариант формулировки требует найти такую динамическую обратную связь (7.2) и векторную функцию $v = V(t,x,\xi)$, чтобы для некоторой векторной функции $\xi_*(t)$ набор $\big(x_*(t), \xi_*(t)\big)$ был асимптотически устойчивым решением системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f\Big(t, x, b\big(t, x, \xi, V(t,x,\xi)\big)\Big), \\ \dot{\xi} &= a\big(t, x, \xi, V(t,x,\xi)\big). \end{aligned} \tag{8.1}$$

Для возвращения на заданную траекторию $x_*(t)$ в описанной выше ситуации управление вычисляется по формуле

$$u = b\Big(t, \xi(t), x(t), V\big(t, x(t), \xi(t)\big)\Big),$$

где $x(t)$ — состояние системы в момент t, а $\xi(t)$ есть решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\xi} = a\Big(t, \xi, x(t), V\big(t, x(t), \xi\big)\Big)$$

с начальным условием $\xi(t_0) = \xi_*(t_0)$. Тогда в случае отсутствия внешних воздействий при $t > t_0$ функция состояний $x(t)$ вместе с функцией $\xi(t)$ образуют решение системы (8.1), которое в случае близости $x(t_0)$ к $x_*(t_0)$ стремится к решению $\big(x_*(t), \xi_*(t)\big)$ при $t \to \infty$ в виду устойчивости последнего. А значит, $x(t)$ стремится к $x_*(t)$.

Пусть система (7.1) линеаризуема динамической обратной связью (7.2) и для нее поставлена задача терминального управления:

$$x(t_{\text{н}}) = x_{\text{н}}, \quad x(t_{\text{к}}) = x_{\text{к}}. \tag{8.2}$$

Покажем как решаются поставленные задачи для таких систем. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f\big(t, x, b(t, x, \xi, v)\big), \qquad \dot{\xi} = a(t, x, \xi, v), \tag{8.3}$$

в которую преобразуется система (7.1) после применения динамической обратной связи (7.2). Для вектора ξ дополнительных переменных зададим произвольные (например, нулевые) начальное ($\xi_{\text{Н}}$) и конечное ($\xi_{\text{К}}$) значения и рассмотрим для системы (8.3) задачу терминального управления:

$$x(t_{\text{Н}}) = x_{\text{Н}}, \quad \xi(t_{\text{Н}}) = \xi_{\text{Н}}, \quad x(t_{\text{К}}) = x_{\text{К}}, \quad \xi(t_{\text{К}}) = \xi_{\text{К}}. \tag{8.4}$$

По определению динамической линеаризуемости система (8.3) обратимой заменой переменных вида

$$t = t, \quad \tilde{y} = \tilde{Y}(t, x, \xi), \quad v = v \tag{8.5}$$

преобразуется в эквивалентную систему

$$y_i^{(n_i)} = v_i, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{8.6}$$

Применяя преобразование (8.5), получаем для системы (8.6) задачу

$$\tilde{y}(t_{\text{Н}}) = \tilde{Y}(t_{\text{Н}}, x_{\text{Н}}, \xi_{\text{Н}}), \quad \tilde{y}(t_{\text{К}}) = \tilde{Y}(t_{\text{К}}, x_{\text{К}}, \xi_{\text{К}}). \tag{8.7}$$

Решение этой задачи и соответствующей задачи стабилизации хорошо известно. Например, существует решение $\big(y_*(t), v_*(t)\big)$ системы (8.6), удовлетворяющее условиям (8.7), в виде многочленов по t:

$$y_{i,*}(t) = \sum_{s=0}^{2n_i-1} a_{i,s} t^s, \quad v_{i,*}(t) = (y_{*,i}(t))^{(n_i)}, \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{8.8}$$

где коэффициенты $\{a_{i,s}\}$ находятся из системы уравнений (8.7). Эта система состоит из линейных уравнений на $\{a_{i,s}\}$, и в случае $t_{\text{К}} \neq t_{\text{Н}}$ матрица системы невырожденна. Поэтому система имеет единственное решение.

Применяя замену переменных

$$t = t, \quad x = X(t, \tilde{y}), \quad \xi = \Xi(t, \tilde{y}), \quad v = v, \tag{8.9}$$

обратную к замене (8.5), получаем из решения $\big(y_*(t), v_*(t)\big)$ решение $\big(x_*(t), \xi_*(t), v_*(t)\big)$ системы (8.3). Это решение удовлетворяет условиям (8.4) в виду взаимной обратимости замен (8.5) и (8.9). Таким образом, зависимость

$$u_*(t) = b\big(t, \xi_*(t), x_*(t), v_*(t)\big), \quad t \in [t_{\text{Н}}, t_{\text{К}}],$$

решает задачу терминального управления (8.2).

Для решения соответствующей задачи стабилизации построим обратную связь

$$v_i = \big(y_{*,i}(t)\big)^{(n_i)} + \sum_{j=0}^{n_i-1} \gamma_{i,j} \left(y_i^{(j)} - \big(y_{*,i}(t)\big)^{(j)} \right), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{8.10}$$

где постоянные коэффициенты $\gamma_{i,j}$ находятся из условия асимптотической устойчивости следующей линейной системы дифферениальных уравнений

$$e_i^{(n_i)} = \sum_{j=0}^{n_i-1} \gamma_{i,j} e_i^{(j)}, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Обратная связь (8.10) дает решение задачи стабилизации системы (8.6), так как получающаяся с помощью нее система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид

$$y_i^{(n_i)} = \big(y_{*,i}(t)\big)^{(n_i)} + \sum_{j=0}^{n_i-1} \gamma_{i,j} \left(y_i^{(j)} - \big(y_{*,i}(t)\big)^{(j)}\right), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{8.11}$$

а значит, $y_*(t)$ есть асимптотически устойчивое решение этой системы.

Обозначим через $v = V(t, \tilde{y})$ функцию (8.10). Замена переменных

$$t = t, \quad x = X(t, \tilde{y}), \quad \xi = \Xi(t, \tilde{y}),$$

полученная из замены (8.9) удалением v, преобразует решение $y_*(t)$ системы (8.11) в решение $\big(x_*(t), \xi_*(t)\big)$ системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f\Big(t, x, b\big(t, x, \xi, V(t, Y(t, x, \xi))\big)\Big), \\ \dot{\xi} &= a\Big(t, x, \xi, V\big(t, Y(t, x, \xi)\big)\Big). \end{aligned}$$

Примеры показывают (см. [13] и ссылки там), что очень часто решение $\big(x_*(t), \xi_*(t)\big)$ последней системы тоже асимптотически устойчиво. В этом случае динамическая обратная связь (7.2) и векторная функция $v = V\big(t, Y(t, x, \xi)\big)$ решают задачу стабилизации для системы (7.1). При этом подбор коэффициентов $\gamma_{i,j}$ в (8.11) позволяет регулировать скорость возвращения системы на заданную траекторию $x_*(t)$.

8.2. Управление движением самолета вертикального взлета

Рассмотрим движение самолета вертикального взлета на этапе выполнения предпосадочных маневров. Используем упрощенную модель [13], которая учитывает только движение в вертикальной плоскости, перпендикулярной продольной оси. Это движение описывает система уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= u_1 \sin\theta - \varepsilon u_2 \cos\theta, \\ \ddot{z} &= u_1 \cos\theta + \varepsilon u_2 \sin\theta - 1, \\ \ddot{\theta} &= u_2, \end{aligned} \tag{8.12}$$

где x и z — нормированные координаты самолета по горизонтальной и вертикальной осям соответственно, θ — угол крена, v_x, v_z, v_θ — соответствующие скорости, u_1 — управление, пропорциональное общей тяге двигателей, u_2 — управление, пропорциональное разности тяг двух двигателей, ε — малая константа. Вектор с координатами

$$x,\ v_x = \dot{x},\ z,\ v_z = \dot{z},\ \theta,\ v_\theta = \dot{\theta}$$

задает состояние системы, вектор (u_1, u_2) — ее управление.

Система (8.12) регулярна во всем пространстве, а в точках, где $v_\theta \neq 0$ и $u_1 - \varepsilon v_\theta^2 \neq 0$, она плоская, и функции

$$y_1 = x + \varepsilon \sin\theta, \qquad y_2 = z + \varepsilon \cos\theta$$

образуют ее плоский выход. Действительно, в указанных точках имеем

$$\begin{aligned} x &= y_1 - \varepsilon \frac{\ddot{y}_1}{\sqrt{(\ddot{y}_1)^2 + (\ddot{y}_2 + 1)^2}}, \\ z &= y_2 - \varepsilon \frac{\ddot{y}_2 + 1}{\sqrt{(\ddot{y}_1)^2 + (\ddot{y}_2 + 1)^2}}, \\ \theta &= \operatorname{arctg} \frac{\ddot{y}_1}{\ddot{y}_2 + 1}. \end{aligned}$$

Так как v_x, v_z, v_θ — производные в силу системы (8.12) функций x, z, θ соответственно, то переменные v_x, v_z, v_θ также выражаются через y_1, y_2 и их производные. Плоскостность системы (8.12) следует из теоремы 7.5.

Итак, переменные состояния системы (8.12) выражаются через $t, \tilde{y} = (y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ddot{y}_1, \ddot{y}_2, \dddot{y}_1, \dddot{y}_2)$. Выберем такие две функции ξ_1, ξ_2 переменных $t, \tilde{y}$, чтобы переход от переменных $t, x, z, \theta, v_x, v_z, v_\theta, \xi_1, \xi_2$ к переменным $t, \tilde{y}$ был обратим. Положим:

$$\xi_1 = \sqrt{(\ddot{y}_1)^2 + (\ddot{y}_2 + 1)^2}, \qquad \xi_2 = \dot{\xi}_1.$$

Тогда $\ddot{y}_1$ и $\ddot{y}_2$ выражаются через θ и ξ_1:

$$\ddot{y}_1 = \xi_1 \sin\theta, \qquad \ddot{y}_2 = -1 + \xi_1 \cos\theta,$$

и, значит, y_1, y_2 выражаются через x, z, θ, ξ_1, а $\dot{y}_1, \dot{y}_2, \dddot{y}_1, \dddot{y}_2$ — через производные полученных выражений для $y_1, y_2, \ddot{y}_1$ и $\ddot{y}_2$. Выражая $\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, u_1, u_2$ через $t, \tilde{y}, v_1 = y_1^{(4)}, v_2 = y_2^{(4)}$, а потом переходя к переменным t, ξ, x, v, получаем динамическую обратную связь

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= v_1 \sin\theta + v_2 \cos\theta + v_\theta^2 \xi_1, \\ u_1 &= \xi_1 + \varepsilon v_\theta^2, \\ u_2 &= \frac{1}{\xi_1} \left(v_1 \cos\theta - v_2 \sin\theta - 2 v_\theta \xi_2 \right), \end{aligned}$$

которая линеаризует систему (8.12).

С целью демонстрации изложенного выше метода положим $\varepsilon = 1$ и решим следующую задачу терминального управления для системы (8.12):

$$\begin{array}{llll} x(0) = 10, & z(0) = 5, & \theta(0) = 0, & v_x(0) = -10, \\ v_z(0) = -5, & v_\theta(0) = 0, & x(1) = 0, & z(1) = 0, \\ \theta(1) = 0, & v_x(1) = -10, & v_z(1) = -5, & v_\theta(1) = 0. \end{array} \tag{8.13}$$

Начальные и конечные значения дополнительных переменных ξ_1, ξ_2 зададим следующим образом:

$$\xi_1(0) = 1 = \xi_1(1), \qquad \xi_2(0) = 0 = \xi_2(1).$$

Тогда соответствующая задача терминального управления для линейной системы имеет вид:

$$\begin{array}{llll} y_1(0) = 10, & y_2(0) = 6, & \dot{y}_1(0) = -10, & \dot{y}_2(0) = -5, \\ \ddot{y}_1(0) = 0, & \ddot{y}_2(0) = 0, & \dddot{y}_1(0) = 0, & \dddot{y}_2(0) = 0, \\ y_1(1) = 0, & y_2(1) = 1, & \dot{y}_1(1) = -10, & \dot{y}_2(1) = -5, \\ \ddot{y}_1(1) = 0, & \ddot{y}_2(1) = 0, & \dddot{y}_1(1) = 0, & \dddot{y}_2(1) = 0. \end{array}$$

Решение этой задачи в пространстве многочленов порядка 7 есть

$$y_{*,1}(t) = -10t + 10, \qquad y_{*,2}(t) = -5t + 6.$$

Для решения соответствующей задачи стабилизации рассмотрим следующую устойчивую систему дифференіальных уравнений

$$e_i^{(4)} = -4\dddot{e}_i - 6\ddot{e}_i - 4\dot{e}_i - e_i, \qquad i = 1, 2.$$

Соответствующая стабилизирующая обратная связь имеет вид

$$\begin{aligned} v_1 &= -4\dddot{y}_1 - 6\ddot{y}_1 - 4(\dot{y}_1 + 10) - (y_1 + 10t - 10), \\ v_2 &= -4\dddot{y}_2 - 6\ddot{y}_2 - 4(\dot{y}_2 + 5) - (y_2 + 5t - 6). \end{aligned}$$

Возвращаясь к системе (8.12) с $\varepsilon = 1$, получаем решение $u_1 = 1, u_2 = 0$ задачи (8.13) и решение задачи стабилизации:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_1\left(v_\theta^2 - 6\right) - 4\xi_2 - 1 - \sin\theta(4v_x + x + 10t + 30) - \\ &\qquad - \cos\theta(4v_z + z + 5t + 8), \\ u_1 &= \xi_1 + v_\theta^2, \\ u_2 &= -4v_\theta - 4\frac{v_\theta}{\xi_1} - 2\frac{\xi_2 v_\theta}{\xi_1} - \frac{\cos\theta}{\xi_1}(4v_x + x + 10t + 30) + \\ &\qquad + \frac{\sin\theta}{\xi_1}(4v_z + z + 5t + 8). \end{aligned}$$

При этом желаемая траектория есть

$$x_*(t) = -10t + 10, \quad z_*(t) = -5t + 5, \quad \theta_*(t) = 0.$$

9. ПРИМЕНЕНИЯ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ СИСТЕМ

9.1. Построение динамической обратной связи

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m, \\ y &= h(x), \quad y \in \mathbb{R}^m, \end{aligned} \tag{9.1}$$

размерноость входа (u) и выхода (y) которой равны рангу системы: $\rho = m = p$. Применяя алгоритм из п. 5.2, построим для системы (9.1) нормальную форму. Так как размерность входа и выхода совпадают с рангом системы, то переменные $y_{[0]}, \ldots, y_{[\varkappa+1]}, v_{\#}$ (см. п. 5.2) отсутствуют, нормальная форма имеет вид

$$\begin{aligned} y_{(j)}^{(j)} &= v_{(j)}, \quad j = \overline{1,\varkappa}, \\ \dot{\eta} &= \varphi(\eta, \tilde{y}, v, \dot{v}, \ldots, v^{(\varkappa-1)}), \end{aligned} \tag{9.2}$$

а соответствующее обратимое преобразование системы (9.1) в нормальную форму (9.2) — вид

$$\begin{aligned} &y = h(x), \quad y_{(i)}^{(j)} = h_{(i)}^{(j)}(x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(j-1)}), \\ &\eta = \eta(x), \quad v_{(i)} = h_{(i)}^{(i)}(x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(i-1)}), \qquad i = \overline{1,\varkappa}, \quad j = \overline{1, i-1}. \end{aligned} \tag{9.3}$$

Можно показать, что функция φ из системы (9.2) зависит только от $\eta, \hat{y} = (y, \dot{y}, \ldots, y^{(k-1)})$ и $\vartheta = y^{(k)}$, наборы $\tilde{y}, v_{(1)}, \ldots, v_{(k-1)}$ есть части набора $\hat{y}$, $v_{(k)}$ — часть набора ϑ, а обратное преобразование к преобразованию (9.3) имеет вид

$$x = X(\eta, \hat{y}), \quad u = U(\eta, \hat{y}, \vartheta). \tag{9.4}$$

Алгоритм построения динамической обратной связи, преобразующей систему в нормальную форму при $\rho = p = m$.

1. Для системы (9.1) строим нормальную форму (9.2).

2. Выбираем векторную функцию ξ переменных $\eta, \hat{y}$ так, чтобы матрица Якоби $\partial(\xi, X)/\partial(\eta, \hat{y})$ была квадратной и невырожденной. Тогда функции ξ и X определяют обратимую замену переменных $(\eta, \hat{y}) \to (x, \xi)$, обратная к которой имеет вид

$$\eta = \eta(x), \quad \hat{y} = Y(x, \xi). \tag{9.5}$$

3. Выражаем производную $\dot{\xi}$ функции ξ в силу системы (9.2) через $\eta, \hat{y}$ и ϑ.

4. В полученных выражениях для $\dot{\xi}$ и u переходим от переменных $\eta, \hat{y}, \vartheta$ к переменным ξ, x, ϑ. Получаем динамическую обратную связь

$$\dot{\xi} = a(x, \xi, \vartheta), \quad u = b(x, \xi, \vartheta), \tag{9.6}$$

которая в композиции с (9.5) преобразует систему (9.1) в нормальную форму

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= \vartheta, \\ \dot{\eta} &= g(\eta, \hat{y}, \vartheta). \end{aligned} \tag{9.7}$$

9.2. Задача автономного регулирования

Для системы с входом (u) и выходом (y)

$$\Sigma: \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x,u), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m, \\ y = h(x), \quad y \in \mathbb{R}^p, \end{cases}$$

требуется найти динамическую обратную связь

$$\dot{\zeta} = a(x,\zeta,v), \quad u = b(x,\zeta,v), \quad \zeta \in \mathbb{R}^d,\ v \in \mathbb{R}^p,$$

которая преобразует Σ в такую систему

$$\dot{x} = f\big(x, b(x,\zeta,v)\big), \quad \dot{\xi} = a(x,\zeta,v), \quad y = h(x),$$

что для всех $i = \overline{1,p}$ выход y_i и все его производные зависят только от $x, \zeta, v_i, \dot{v}_i, \dots, v_i^{(j)}, \dots$ и не зависят от $v_l, \dot{v}_l, \dots, v_l^{(j)}, \dots$ при $l \neq i$.

Теорема 9.1. Задача автономного регулирования разрешима $\Leftrightarrow$ система обратима справа.

Пример 9.1.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &=& u_1 \\ \dot{x}_2 &=& x_4 + u_1 \\ \dot{x}_3 &=& x_4 - x_3 \\ \dot{x}_4 &=& u_2 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \dot{\xi} = \vartheta_1 \\ u_1 = \xi \\ u_2 = \vartheta_2 - \vartheta_1 \end{array} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 &=& \xi \\ \dot{x}_2 &=& x_4 + \xi \\ \dot{x}_3 &=& x_4 - x_3 \\ \dot{x}_4 &=& \vartheta_2 - \vartheta_1 \\ \dot{\xi} &=& \vartheta_1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} y_1 &=& x_1 \\ y_2 &=& x_2 \end{array} \qquad \begin{cases} \ddot{y}_1 &=& \vartheta_1 \\ \ddot{y}_2 &=& \vartheta_2 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \dot{\eta} = \dot{y}_2 - \dot{y}_1 - \eta \\ (\eta = x_3) \end{array}$$

Алгоритм решения задачи автономного регулирования.

В случае $\rho < p$ задача автономного регулирования не имеет решения.

В случае $\rho = p$ строим динамическую обратную связь (9.6), которая в композиции с (9.5) преобразует систему Σ в нормальную форму (9.7). Построенная динамическая обратная связь решает задачу автономного регулирования.

9.3. Задача изоляции возмущений

Для системы с входом (u), выходом (y) и возмущениями (w)

$$\Sigma: \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x,u,w), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m,\ w \in \mathbb{R}^q, \\ y = h(x), \quad y \in \mathbb{R}^p, \end{cases}$$

требуется найти такую динамическую обратную связь

$$\dot{\zeta} = a(x,\zeta,v), \quad u = b(x,\zeta,v), \quad \zeta \in \mathbb{R}^d,\ v \in \mathbb{R}^p, \tag{9.8}$$

которая преобразует Σ в такую систему

$$\dot{x} = f\big(x, b(x,\zeta,v)\big), \quad \dot{\xi} = a(x,\zeta,v), \quad y = h(x),$$

что для $i = \overline{1,p}$ выход y_i и все его производные не зависят от $w, \dot{w}, \dots, w^{(j)}, \dots$.

Пример 9.2.

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & u_1 \\ \dot{x}_2 & = & x_4 + u_1 \\ \dot{x}_3 & = & x_4 - x_3 + w \\ \dot{x}_4 & = & u_2 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \dot{\xi} = \vartheta_1 \\ u_1 = \xi \\ u_2 = \vartheta_2 - \vartheta_1 \end{array} \qquad \left\{\begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & \xi \\ \dot{x}_2 & = & x_4 + \xi \\ \dot{x}_3 & = & x_4 - x_3 + w \\ \dot{x}_4 & = & \vartheta_2 - \vartheta_1 \\ \dot{\xi} & = & \vartheta_1 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{lcl} y_1 & = & x_1 \\ y_2 & = & x_2 \end{array} \qquad \left\{\begin{array}{lcl} \ddot{y}_1 & = & \vartheta_1 \\ \ddot{y}_2 & = & \vartheta_2 \\ \dot{\eta} & = & \dot{y}_2 - \dot{y}_1 - \eta + w \end{array}\right.$$

Обозначим

$$\mathcal{E}_0 = \mathrm{span}_{\mathcal{F}}\{dx\}, \quad \mathcal{U} = \mathrm{span}_{\mathcal{F}}\{du^{(j)} : j \geq 0\}, \quad \mathcal{Y} = \mathrm{span}_{\mathcal{F}}\{dy^{(j)} : j \geq 0\}.$$

Теорема 9.2. Задача изоляции возмущений разрешима $\Leftrightarrow$ производная в силу системы каждого элемента модуля $\mathcal{E}_0 \cap \mathcal{Y}$ лежит в $\mathcal{E}_0 + \mathcal{U}$, а значит, не зависит от возмущений w.

Алгоритм решения задачи изоляции возмущений.

1. Для системы Σ с входом u и выходом y строим нормальную форму

$$\begin{array}{rcl} y_{(j)}^{(j)} & = & v_{(j)}, \quad j = \overline{1, \varkappa}, \\ \dot{\eta} & = & \varphi(\eta, \tilde{y}, v, \dot{v}, \ldots, v^{(\varkappa-1)}, w, \dot{w}, \ldots, w^{(\varkappa-1)}), \end{array}$$

а также преобразование системы в нормальную форму.

2. Если функции

$$v_{(i)} = h_{(i)}^{(i)}(x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(i-1)}), \quad i = \overline{1, \varkappa},$$

не зависят от w, то соответствующая динамическая обратная связь решает задачу изоляции возмущений.

Пример 9.3. Модель тележки с фиксированной задней осью

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & u_1 \cos(\theta + \varphi) \\ \dot{z} & = & u_1 \sin(\theta + \varphi) \\ \dot{\theta} & = & u_1 \sin\varphi - w \\ \dot{\varphi} & = & u_2 + w\ . \end{array}\right. \qquad \begin{array}{lcl} y_1 & = & x \\ y_2 & = & z \end{array}$$

10. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ

10.1. Задача параметрической идентификации и классический подход к ее решению

Рассмотрим задачу построения математических моделей технических, физических, биологических и т.п. систем или процессов по данным наблюдениz. Предположим известно, что модель есть динамическая система с выходом, но неизвестны значения некоторых параметров $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$ этой системы:

$$\dot{x} = f(t, x, \theta), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{10.1}$$

$$y = h(x), \quad y \in \mathbb{R}^p, \tag{10.2}$$

где t — время, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — состояние системы, $y = (y_1, \ldots, y_p)$ — измеряемый выход, а $\dot{x} \equiv dx/dt$. Для достоверности математической модели необходимо, что бы результаты, полученные с ее помощью, совпадали с результатами полученными из эксперимента. *Задача параметрической идентификации* заключается в нахождение таких численных значений параметров θ, что значения функций выхода $y(t)$, полученные из модели (10.1)–(10.2) с данными θ и из эксперимента, были максимально близки.Точного совпадения этих значений получить обычно не удается из-за неточности модели и из-за неточности вычислений.

Система (10.1)–(10.2) называется *идентифицируемой*, если по измерениям выходов y системы можно определить ее параметры θ.

Один из хорошо известных подходов к решению этой задачи основан на нахождения минимума некоторого целевого функционала, относительно невязки $\varepsilon(t, \hat{\theta}) = y(t) - \hat{y}(t, \hat{\theta})$, вычисляемой как разность наблюдаемых значений объекта $(y(t))$ и значений $(\hat{y}(t, \hat{\theta}))$ выходов математической модели при наборе параметров $\hat{\theta}$, например:

$$\theta = \arg\min_{\hat{\theta}} \int_0^T \|\hat{y}(t, \hat{\theta}) - y(t)\|^2 dt,$$

где T — длительность эксперимента. Минимум данного функционала означает, что соответствующие значения параметров подобраны наиболее точно для выбранной модели. Схема этого процесса параметрической идентификации представлена на рисунке 10.1.

Данный подход имеет несколько существенных недостатков. Одним из них является необходимость на каждом шаге процесса оптимизации решать систему уравнений (10.1) для определения значения выхода (10.2) на определенном наборе параметров $\hat{\theta}$.

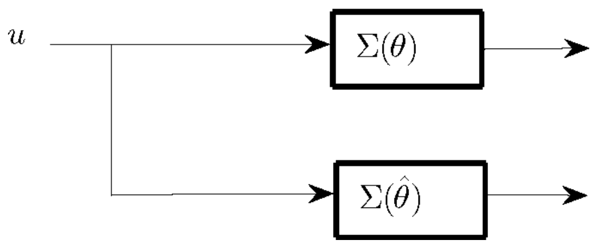


Рис. 10.1. Классический подход

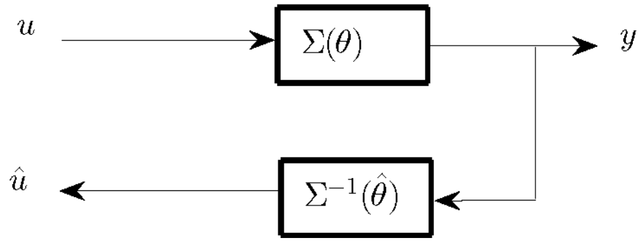


Рис. 10.2. Метод обращения

10.2. Параметрическая идентификация с использованием обратимых систем

Система (10.1)–(10.2) не имеет входов. Ее нормальная форма также не имеет входов, а значит, есть вида (см. (5.1))

$$\begin{aligned} y_{[j]}^{(j)} &= G_j(\tilde{y},\theta), \quad j=\overline{0,\varkappa+1}, \\ \dot{\eta} &= \varphi(\eta,\tilde{y},\theta). \end{aligned} \tag{10.3}$$

где $\tilde{y}=(y_{[1]},\ldots,y_{[\varkappa+1]},y_{[2]}^{(1)},\ldots,y_{[\varkappa+1]}^{(\varkappa)})$. Правые части уравнений зависят от выбора параметров θ, так как от θ зависит исходная система (10.1)–(10.2). Вводя входы как $v_{[j]}=y_{[j]}^{(j)}-G_j(\tilde{y}), j=\overline{1,\varkappa+1}$, получаем обратимую систему (см. теорему 5.3). Если параметры θ таковы, что выход $\hat{y}(t,\theta)$ системы (10.1)–(10.2) совпадает с наблюдаемыми значениями $y(t)$, то функция $y(t)$ удовлетворяет системе (10.3). Поэтому решаем задачу параметрической идентификации, минимизируя функционал отклонения входов $v=(v_{[1]},\ldots,v_{[\varkappa+1]})$ от 0:

$$\int\limits_0^T \sum_{j=1}^{\varkappa+1} \left\| y_{[j]}^{(j)}(t) - G_j(\tilde{y}(t),\hat{\theta}) \right\|^2 dt, \tag{10.4}$$

где $y_{[j]}^{(j)}(t)$ — производная порядка j функции $y_{[j]}(t)$, полученной экспериментально. Схема этого метода решения задачи идентификации параметров представляется рисунком 10.2.

Для случая системы с входом, выходом и параметрами:

$$\dot{x} = f(t,x,u,\theta), \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad u\in\mathbb{R}^m, \tag{10.5}$$

$$y = h(x), \quad y\in\mathbb{R}^p, \tag{10.6}$$

задача параметрической идентификации заключается в нахождение численных значений параметров θ по значениям выходов y и входов u.

Эта задача также может быть решена методом обращения. А именно, преобразуем систему (10.5) к виду

$$\dot{x} = f(t,x,u,\theta), \qquad \dot{u} = w, \tag{10.7}$$

где (x,u) — состояние системы, w — вход. Применяя приведенный в разделе 5.2 алгоритм к системе (10.7) с выходом (y,u), где $y=h(x)$, находим ее нормальный вид (5.1) с функциями φ и $G_j, j=\overline{1,\varkappa+1}$, зависящими от параметров θ. Минимизируемый функционал в этом случае имеет вид

$$\int\limits_0^T \left(\sum_{j=1}^{\varkappa+1} \left\| y_{[j]}^{(j)}(t) - G_j(\tilde{y}(t),\hat{\theta}) \right\|^2 + \sum_{j=1}^{\varkappa} \left\| y_{(j)}^{(j)}(t) - v_{(j)} \right\|^2 \right) dt, \tag{10.8}$$

где $v_{(j)}$ — функции от $\tilde{y}(t), u(t), \dot{u}(t), \ldots, u^{(\varkappa-1)}(t), \hat{\theta}$, полученные из преобразования (5.2) и обратного преобразования к (5.2).

Отметим, что и в случае системы (10.1)–(10.2), и в случае системы (10.5)–(10.6) функционалы (10.4) и (10.8) характеризуют невязку уравнений, которым должны удовлетворять функции выхода $y(t)$ (в случае системы (10.5)–(10.6) — это часть набора функций $(y(t), u(t))$). Остальные уравнения системы (5.1) не учитываются функционалом, так как они не дают никаких ограничений на полученные экспериментально данные, поскольку значения η определяются только этими уравнениями.

Задача. Найдите функционал вида (10.8) для системы вход–выход с положительными параметрами $\theta_1, \ldots, \theta_6$:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \theta_6 \frac{C - [x_1 + x_2]}{C} x_1 - \theta_1 x_1 x_3, \\
\dot{x}_2 &= \theta_1 x_1 x_3 - \theta_2 x_2 - u, \\
\dot{x}_3 &= \theta_3 x_2 - \theta_4 x_3 - \theta_1 x_1 x_3, \\
\dot{x}_4 &= \theta_5 x_2 + \theta_4 x_3, \\
y_1 &= x_3, \\
y_2 &= x_4.
\end{aligned}
$$

Новый подход лишен упомянутого недостатка классического подхода, т.е. решать систему нелинейных дифференциальных уравнений на каждом шаге оптимизации нет необходимости. Однако он имеет свои недостатки. Основным из них является необходимость нахождения производных от выходов системы и дальнейшее оперирование с найденными производными.

10.3. Численное дифференцирование

Выходы системы $y(t)$ определяются экспериментально, а значит, с ограниченной точностью. Векторную функцию $y(t)$ можно представить себе как сумму точного значения и случайного шума $\omega(t)$, вызванного неточностью эксперимента. Хорошо известно [4], что задача численного нахождения производных является некорректно поставленной. Так же известны оценки, позволяющие судить о влиянии шума в изначальных данных на результаты операции численного дифференцирования разностными методами: эксперименты показывают, что ошибка (шум) возрастает приблизительно в 100 раз.

В качестве примера рассмотрим численное нахождение производной от функции $y = \sin(t)$, искаженной аддитивным гауссовым шумом с нулевым средним значением и дисперсией $\sigma = 0.01$. Пусть функция задана на сетке $t \in [0, 6\pi]$ с шагом $h = 0.01$. Исходная функция и найденная по разностной формуле производная, вместе с точным значением производной изображены на рисунке 10.3.

Хорошо видно, что применение разностных формул значительно усиливает искажение данных. Таким образом, даже небольшой шум $\omega(t)$ может сделать невозможным нахождение производных $y(t)$, не говоря уже о дальнейшем использовании этих данных.

В последние годы был предложен метод [16, 17], позволяющий восстанавливать численное значение производных и подавлять шум любого характера. Новый подход основан на операционном исчислении и дает следующие оценки для производных по наблюдаемым значений функций

$$
x^{(n)}(t, k, \mu, q) = \frac{1}{{T_1}^n} \int\limits_0^1 \left[\sum_{l=0}^{q} \gamma_{k_l, \mu_l}^n \lambda_l \frac{d^n}{d\tau^n} \left\{ \omega_{k,\mu}^n \right\} \right] x(t - T_1 \tau) d\tau
$$

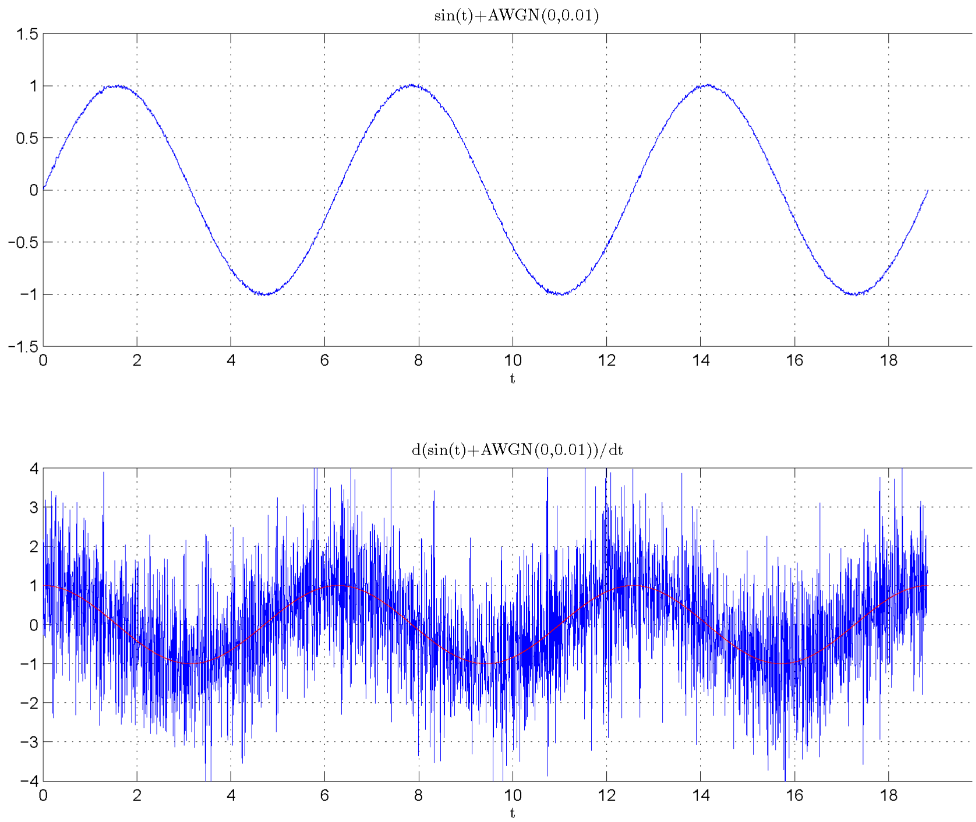


Рис. 10.3. Усиление шума при применении разностных формул.

где T_1 — продолжительность наблюдений, $k, \mu, q \in \mathbb{N}_0$ — параметры метода (хорошие результаты получаются при $k = 1, \mu = 1, q = 0$ или $q = 1$),

$$k_l = k + q - l, \mu_l = \mu + l, \quad \gamma^n_{k_l,\mu_l} = \frac{(2n + 1 + k_l + \mu_l)!}{(k_l + n)!(\mu_l + n)!}, \quad \omega^n_{k,\mu} = \tau^{k+n}(1 - \tau)^{\mu+n},$$

$\lambda_0, \ldots, \lambda_q$ — вычисляемые коэффициенты: $\lambda_0 = 1$ при $q = 0$, и $\lambda_0 = -n-k-1, \lambda_1 = n+k+2$ при $q = 1$ (подробности см. в [16]). Приведенная формула дает хорошие результаты в случае оценки производных первого и второго порядка.

11. МЕТОД НАКРЫТИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

11.1. Описание метода накрытий

Для демонстрации идеи метода рассмотрим плоскую систему

$$\dot{x} = f(t, x, u), \qquad x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^2, \quad u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}.$$

Как известно (см. § 7), такая система эквивалентна системе $y^{(2)} = v$, а граничные условия для плоской системы преобразуются в условия

$$y(t_{\text{Н}}) = y_{\text{Н}}, \quad \dot{y}(t_{\text{Н}}) = \dot{y}_{\text{Н}}, \quad y(t_{\text{К}}) = y_{\text{К}}, \quad \dot{y}(t_{\text{К}}) = \dot{y}_{\text{К}}. \tag{11.1}$$

Будем искать решение в пространстве многочленов. Так как данная задача включает четыре граничных условия, то рассмотрим многочлены не выше третьего порядка, т.е. искомое решение удовлетворяет уравнению

$$y^{(4)} = 0. \tag{11.2}$$

Таким образом, задача терминального управления переформулируется в краевую задачу (11.2), (11.1).

Для решения краевой задачи (11.2), (11.1) рассмотрим функцию

$$p = y - \frac{1}{2}(t_{\text{К}} - t)^2 y^{(2)} - \frac{1}{3}(t_{\text{К}} - t)^3 y^{(3)}. \tag{11.3}$$

Для любого решения y уравнения (11.2) имеем

$$\dot{p} = \dot{y} + (t_{\text{К}} - t) y^{(2)} + \frac{1}{2}(t_{\text{К}} - t)^2 y^{(3)}, \tag{11.4}$$

$$\ddot{p} = 0. \tag{11.5}$$

Функция p такова, что значения $p(t_{\text{К}}), \dot{p}(t_{\text{К}})$ однозначно определяются значениями $y(t_{\text{К}})$, $\dot{y}(t_{\text{К}})$, а значения $y^{(2)}(t_{\text{Н}}), y^{(3)}(t_{\text{Н}})$ — значениями $p(t_{\text{Н}}), \dot{p}(t_{\text{Н}}), y(t_{\text{Н}}), \dot{y}(t_{\text{Н}})$. Поэтому задача (11.2)–(11.1) может быть решена следующим образом. Из конечных условий (11.1) находятся значения $p(t_{\text{К}}), \dot{p}(t_{\text{К}})$. Эти значения однозначно определяют решение $p(t)$ уравнения (11.5), как решение задачи Коши в сторону уменьшения времени: от $t_{\text{К}}$ до $t_{\text{Н}}$. Находим $p(t_{\text{Н}}), \dot{p}(t_{\text{Н}})$, а из уравнений (11.3)–(11.4) — значения $y^{(2)}(t_{\text{Н}}), y^{(3)}(t_{\text{Н}})$. Наконец, решая задачу Коши для уравнения (11.2) с известными значениями $y(t_{\text{Н}}), \dot{y}(t_{\text{Н}}), y^{(2)}(t_{\text{Н}}), y^{(3)}(t_{\text{Н}})$, находим зависимость $y(t)$. Данная функция есть решение задачи (11.2), (11.1), так как она удовлетворяет начальным условиям (11.1) по построению, а конечным условиям (11.1) — из уравнений (11.3), (11.4).

Отметим, что соотношение (11.3) определяет отображение из решений уравнения (11.2) в решения уравнения (11.5). Отображения такого вида в геометрии дифференциальных уравнений [9] называют накрытиями. Точное определение следующее.

Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{Y}$ — две системы обыкновенных дифференциальных уравнений. *Накрытием* из системы $\mathcal{E}$ в систему $\mathcal{Y}$ называют сюръективное регулярное отображение ν расширенного фазового пространства системы $\mathcal{E}$ в расширенное фазовое пространство системы $\mathcal{Y}$, при котором любая траектория системы $\mathcal{E}$ регулярно отображается в траекторию системы $\mathcal{Y}$. Регулярность отображения ν означает, что в каждой точке ранг дифференциала $d\nu$ равен размерности образа. Регулярность отображения траекторий означает, что в каждой точке касательный вектор к траектории не лежит в ядре $d\nu$.

Из этого определения следует, что прообраз любой траектории системы $\mathcal{Y}$ состоит из точек траекторий некоторой подсистемы системы $\mathcal{E}$. Этот факт используется далее.

Рассмотрим теперь общий случай задачи терминального управления для системы

$$\dot{x} = f(t, x, u), \qquad x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m, \tag{11.6}$$

с граничными условиями

$$x(t_{\text{н}}) = x_{\text{н}}, \qquad x(t_{\text{к}}) = x_{\text{к}}. \tag{11.7}$$

Предположим, что мы нашли функции $U_i, \varphi_j, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$, переменных

$$t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \dot{u}_1, \ldots, u_1^{(k_1-1)}, u_2, \ldots, u_m^{(k_m-1)}, \quad k_1 + \ldots + k_m = n,$$

удовлетворяющие следующим условиям.

(A) Соотношения $p_j = \varphi_j, j = \overline{1,n}$, определяют накрытие из системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_j &= f_j(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m), \qquad j = \overline{1,n}, && (11.8)\\ u_i^{(k_i)} &= U_i(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \dot{u}_1, \ldots, u_1^{(k_1-1)}, u_2, \ldots, u_m^{(k_m-1)}), \qquad i = \overline{1,m}, && (11.9) \end{aligned}$$

в систему вида

$$\dot{p} = P(t, p), \quad p \in \mathbb{R}^n. \tag{11.10}$$

(B) Заданные конечные значения $x(t_{\text{к}})$ однозначно определяют значения $p_{\text{к}} = p(t_{\text{к}})$ и наоборот значения $p(t_{\text{к}})$ однозначно определяют значения $x(t_{\text{к}})$.

(C) Если $p_{\text{н}}$ — значение в точке $t_{\text{н}}$ решения $p(t)$ системы (11.10), удовлетворяющего условию $p(t_{\text{к}}) = p_{\text{к}}$, то система нелинейных уравнений

$$p_{\text{н}} = \varphi(t_{\text{н}}, x_{1,\text{н}}, \ldots, x_{n,\text{н}}, u_1(t_{\text{н}}), \dot{u}_1(t_{\text{н}}), \ldots, u_1^{(k_1-1)}(t_{\text{н}}), u_2(t_{\text{н}}), \ldots, u_m^{(k_m-1)}(t_{\text{н}})) \tag{11.11}$$

имеет решение относительно $u_1(t_{\text{н}}), \dot{u}_1(t_{\text{н}}), \ldots, u_1^{(k_1-1)}(t_{\text{н}}), u_2(t_{\text{н}}), \ldots, u_m^{(k_m-1)}(t_{\text{н}})$.

В случае выполнения условий (A), (B), (C) задача (11.6), (11.7) может быть решена следующим образом.

1. Из конечных условий (11.7) вычисляем значение $p(t_{\text{к}})$.
2. Находим решение $p(t)$ системы (11.10), удовлетворяющее условию $p(t_{\text{к}}) = p_{\text{к}}$ (решение задачи Коши в сторону уменьшения времени: от $t_{\text{к}}$ до $t_{\text{н}}$).
3. Вычисляем $p(t_{\text{н}})$.
4. Из системы (11.11) находим значения $u_1(t_{\text{н}}), \dot{u}_1(t_{\text{н}}), \ldots, u_1^{(k_1-1)}(t_{\text{н}}), u_2(t_{\text{н}}), \ldots, u_m^{(k_m-1)}(t_{\text{н}})$.
5. Решая задачу Коши для системы (11.8)–(11.9) с начальными значениями

$$t_{\text{н}}, x_{1,\text{н}}, \ldots, x_{n,\text{н}}, u_1(t_{\text{н}}), \dot{u}_1(t_{\text{н}}), \ldots, u_1^{(k_1-1)}(t_{\text{н}}), u_2(t_{\text{н}}), \ldots, u_m^{(k_m-1)}(t_{\text{н}}), \tag{11.12}$$

находим решение $\big(x(t), u(t)\big)$ системы (11.6).

Найденное таким образом решение есть решение задачи (11.6), (11.7), так как функция $x(t)$ удовлетворяет начальным условиям (11.7) по построению, а конечным условиям (11.7) — из условия (B).

Схема метода накрытий:

$$
\begin{array}{lcccc}
\text{задача} & \dot{x} = f(t,x,u) & \begin{array}{c} x(t_{\text{н}}) = x_{\text{н}} \\ x(t_{\text{к}}) = x_{\text{к}} \end{array} & & \big(x(t), u(t)\big) \\
 & & \downarrow & & \uparrow \\
\text{r-замыкание} & \begin{array}{c} u^{(k)} = U(t,x,\tilde{u}) \\ \tilde{u} = (u, \dot{u}, \ldots, u^{(k-1)}) \end{array} & \downarrow & & \tilde{u}(t_{\text{н}}) = \tilde{u}_{\text{н}} \\
 & & & & \\
\text{накрытие} & \downarrow \; p = p(t,x,\tilde{u}) & \downarrow & & \uparrow \\
 & & & & \\
\text{база} & \dot{p} = P(t,p) & p(t_{\text{к}}) = p_{\text{к}} & \to & p(t),\; p_{\text{н}} = p(t_{\text{н}})
\end{array}
$$

Изложенный алгоритм решения задачи терминального управления основан на построении таких функций $U_1, \ldots, U_m$, для которых соответствующая система (11.8)–(11.9) накрывает систему вида (11.10). Условие (B) устанавливает связь этого накрытия с конечными условиями поставленной задачи терминального управления, а условие (C) — с начальными условиями этой задачи.

Систему вида (11.8)–(11.9), удовлетворяющую условиям (A), (B) и (C) для некоторых функций $\varphi_j, j = \overline{1,n}$, будем называть *$r$–замыканием* задачи терминального управления (11.6), (11.7). Как показано выше, r–замыкание позволяет решать задачу (11.6), (11.7).

В случае, когда есть ограничения на x, u и производные u, необходимо подбирать r–замыкание так, чтобы соответствующее решение задачи терминального управления удовлетворяло этим ограничениям. Для построения такого r–замыкания можно использовать понятие инвариантного множества динамической системы. Напомним, что подмножество $\mathcal{U}$ расширенного фазового пространства динамической системы называют *инвариантным*, если для любой точки из $\mathcal{U}$ траектория системы, проходящая через эту точку, целиком содержится в $\mathcal{U}$. Предположим r–замыкание (11.8)–(11.9) обладает инвариантным множеством $\mathcal{U}$, все точки которого удовлетворяют ограничениям задачи. Тогда если точка (11.12) принадлежит $\mathcal{U}$, то решение задачи Коши для системы (11.8)–(11.9) с начальными значениями (11.12) (а это и есть решение задачи терминального управления (11.6), (11.7)) лежит в $\mathcal{U}$, а значит удовлетворяет ограничениям задачи.

Отметим также, что понятие r–замыкания инвариантно относительно преобразований систем, т.е. если две системы эквивалентны, а для одной из них поставлена задача терминального управления и построено r–замыкание, то используя соответствующее преобразование эквивалентности, получаем задачу терминального управления и r–замыкание для второй системы. Например, любая плоская система эквивалентна системе вида (8.6) (см. [10, 13, 15]), поэтому при терминальном управлении плоской системой достаточно построить r–замыкание для системы (8.6). Кроме того, если система (11.6) регулярная, то из нее переменные управления u можно выразить через t, x и удалить u из системы (11.8)–(11.9). r–Замыкания такого вида мы и будем рассматривать далее.

11.2. Метод накрытий для плоских систем

Покажем, что для плоской системы в качестве r–замыкания можно взять любую определенную динамическую систему, порядок которой определяется количеством граничных условий задачи терминального управления. Для построения соответствующего накрытия будем предполагать, что известно общее решение этой системы. С целью упрощения обозначений рассмотрим сначала случай $m = 1$, а потом обсудим обобщение приводимой конструкции на случай $m > 1$.

Известно (см. § 7), что в случае $m = 1$ любая плоская система приводится к каноническому виду

$$y^{(n)} = v, \tag{11.13}$$

а значит, граничные условия для плоской системы преобразуются в $2n$ условий вида

$$\tilde{y}(t_{\text{Н}}) = \tilde{y}_{\text{Н}}, \quad \tilde{y}(t_{\text{К}}) = \tilde{y}_{\text{К}}, \qquad \tilde{y} = (y, \dot{y}, \dots, y^{(n)}). \tag{11.14}$$

Следовательно, r–замыкание должно быть дифференциальным уравнением на $y = y_1$ порядка $2n$. Из свойства инвариантности r–замыкания следует, что достаточно построить r–замыкание для задачи терминального управления (11.13), (11.14).

Пусть $y = \chi(t, z_1, \dots, z_{2n})$ — такая функция независимых переменных $t, z_1, \dots, z_{2n}$, что матрица

$$(a_{ij}) = \left(\frac{\partial^i \chi}{\partial t^{i-1} \partial z_j}\right), \qquad i = \overline{1, 2n}, \quad j = \overline{1, 2n}, \tag{11.15}$$

невырождена в точке $(t_{\text{К}}, \bar{z}_0)$, $\bar{z}_0 = (z_{1,0}, \dots, z_{2n,0})$. Построим такое дифференциальное уравнение порядка $2n$, чтобы функция $y = \chi(t, z_1, \dots, z_{2n})$ была его общим решением. По теореме о неявной функции в некоторой окрестности точки $(t_{\text{К}}, \bar{z}_0)$ переменные $z_1, \dots, z_{2n}$ представляют собой функции от $t, y, y^{(1)}, \dots, y^{(2n-1)}$:

$$z_i = Z_i(t, y, y^{(1)}, \dots, y^{(2n-1)}), \qquad i = \overline{1, 2n}. \tag{11.16}$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение порядка $2n$:

$$y^{(2n)} = \frac{\partial^{2n} \chi}{\partial t^{2n}}\Big(t,\ Z_1(t, y, y^{(1)}, \dots, y^{(2n-1)}),\ \dots,\ Z_{2n}(t, y, y^{(1)}, \dots, y^{(2n-1)})\Big), \tag{11.17}$$

определенное в окрестности точки

$$\Big(t_{\text{К}},\ y_0 = \chi(t_{\text{К}}, \bar{z}_0),\ y_0^{(1)} = \frac{\partial \chi}{\partial t}(t_{\text{К}}, \bar{z}_0),\ \dots,\ y_0^{(2n-1)} = \frac{\partial^{2n-1} \chi}{\partial t^{2n-1}}(t_{\text{К}}, \bar{z}_0)\Big). \tag{11.18}$$

По построению, для любого набора значений $z_1, \dots, z_{2n}$ из окрестности точки $\bar{z}_0$ функция $y = \chi(t, z_1, \dots, z_{2n})$ есть решение уравнения (11.17), а функции (11.16) — первые интегралы этого уравнения. Поэтому функции

$$\begin{aligned}
p_1 &= \chi\Big(t_{\text{К}},\ Z_1(t, y, y^{(1)}, \dots, y^{(2n-1)}),\ \dots,\ Z_{2n}(t, y, y^{(1)}, \dots, y^{(2n-1)})\Big), \\
p_2 &= \frac{\partial \chi}{\partial t}\Big(t_{\text{К}},\ Z_1(t, y, y^{(1)}, \dots, y^{(2n-1)}),\ \dots,\ Z_{2n}(t, y, y^{(1)}, \dots, y^{(2n-1)})\Big), \\
&\dots \\
p_n &= \frac{\partial^{n-1} \chi}{\partial t^{n-1}}\Big(t_{\text{К}},\ Z_1(t, y, y^{(1)}, \dots, y^{(2n-1)}),\ \dots,\ Z_{2n}(t, y, y^{(1)}, \dots, y^{(2n-1)})\Big),
\end{aligned} \tag{11.19}$$

как функции первых интегралов (здесь $t_{\text{К}}$ — константа) также есть первые интегралы уравнения (11.17). Следовательно, их производные в силу этого уравнения равны нулю:

$$\dot{p}_i = 0, \qquad i = \overline{1, n}. \tag{11.20}$$

Функции (11.16) как первые интегралы уравнения (11.17) не зависят от t на его решениях. Поэтому

$$y^{(i-1)}(t_{\text{К}}) = \frac{\partial^{i-1} \chi}{\partial t^{i-1}}(t_{\text{К}},\ z_1, \dots, z_{2n}) = p_i(t_{\text{К}}), \qquad i = \overline{1, n}. \tag{11.21}$$

Замечание 1. Как известно [1, §5.3], общее решение линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами есть сумма частного решения и линейной комбинации фундаментальной системы решений (ФСР) соответствующей однородной системы. Выбрав в качестве функции $\chi(t, z_1, \ldots, z_{2n})$ такое выражение и обозначив через $z_1, \ldots, z_{2n}$ коэффициенты линейной комбинации, получим систему линейных алгебраических уравнений, связывающих $y, y^{(1)}, \ldots, y^{(2n-1)}$ и $z_1, \ldots, z_{2n}$. Матрица этой системы есть матрица (11.15), совпадающая с матрицей Вронского ФСР. Как известно [1, §5.2], такая матрица невырождена для всех t. Поэтому чтобы найти выражения (11.16), достаточно обратную матрицу к (a_{ij}) умножить на столбец $(y, y^{(1)}, \ldots, y^{(2n-1)})^T$.

Пример 11.1. В качестве $\chi(t, z_1, \ldots, z_{2n})$ возьмем функцию

$$y = z_1 + z_2(t - t_{\text{К}}) + z_3\frac{(t - t_{\text{К}})^2}{2!} + \ldots + z_{2n}\frac{(t - t_{\text{К}})^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Тогда матрица (11.15) верхнетреугольная с единицами на диагонали, а значит, невырожденная во всех точках. Уравнения (11.13) имеет вид $y^{(2n)} = 0$, выражения (11.16) находятся указанным в замечании 1 способом, формулы (11.19) также нетрудно выписать. Применение метода накрытий дает решение в многочленах и совпадает с решением, полученным известным методом (см. § 8).

Теорема 11.1. Пусть $y = \chi(t, z_1, \ldots, z_{2n})$ — такая функция, что матрица (11.15) невырождена в точке $(t_{\text{К}}, \bar{z}_0)$, $\bar{z}_0 = (z_{1,0}, \ldots, z_{2n,0})$. Тогда существует такое $\delta > 0$, что при $t_{\text{Н}} \in (t_{\text{К}} - \delta, t_{\text{К}})$ существует такая окрестность $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ точки

$$\left(\chi(t_{\text{Н}}, \bar{z}_0),\ \frac{\partial\chi}{\partial t}(t_{\text{Н}}, \bar{z}_0),\ \ldots,\ \frac{\partial^{n-1}\chi}{\partial t^{n-1}}(t_{\text{Н}}, \bar{z}_0)\right),$$

что для любой точки $(y_{\text{Н}},\ y_{\text{Н}}^{(1)},\ \ldots,\ y_{\text{Н}}^{(n-1)})$ из $\mathcal{V}$ уравнение (11.17) есть r–замыкание задачи терминального управления для уравнения (11.13) с граничными условиями

$$\begin{aligned} &y(t_{\text{Н}}) = y_{\text{Н}}, \quad y^{(1)}(t_{\text{Н}}) = y_{\text{Н}}^{(1)}, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(t_{\text{Н}}) = y_{\text{Н}}^{(n-1)},\\ &y(t_{\text{К}}) = y_0, \quad y^{(1)}(t_{\text{К}}) = y_0^{(1)}, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(t_{\text{К}}) = y_0^{(n-1)}, \end{aligned}$$

где числа $y_0, y_0^{(1)}, \ldots, y_0^{(n-1)}$ определяются соотношениями (11.18).

Можно сформулировать два подхода к использованию конструкции r–замыкания (11.17)–(11.20) и теоремы 11.1. При первом подходе терминальную задачу (11.6), (11.7) переформулируют в задачу (11.13), (11.14), решают ее с помощью r–замыкания (11.17), а потом обратным переходом находят решение задачи (11.6), (11.7). При втором подходе используется свойство инвариантности r–замыкания. А именно, переходя в уравнении (11.17) от переменных $t, \tilde{y}, v$ к переменным t, x, u получаем r–замыкание задачи (11.6), (11.7).

Для обобщения формул (11.15)–(11.21) и теоремы 11.1 на случай $m > 1$ заметим, что на функцию y_j $(1 \le j \le m)$ налагается $2k_j$ граничных условий (11.14). Поэтому r–замыкание должно иметь порядок $2k_j$ по переменной y_j, $j = \overline{1, m}$. Общее решение такой системы представляет собой такую векторную функцию $y_j = \chi_j(t, z_1, \ldots, z_{2N})$, $j = \overline{1, m}$, $N = k_1 + \ldots + k_m$, которая определяет обратимую замену от переменных $\bar{z} = (z_1, \ldots, z_{2N})$ к переменным $\tilde{y} = (y_1, \dot{y}_1, \ldots, y_1^{(2k_1-1)}, y_2, \ldots, y_m^{(2k_m-1)})$. Матрица (a_{ij}) представляет собой матрицу Якоби этой замены. По аналогии с уравнением (11.17) r–замыкание для многомерного случая есть система

$$y_j^{(2k_j)} = \frac{\partial^{2k_j}\chi_j}{\partial t^{2k_j}}(t,\ \bar{z}), \qquad j = \overline{1, m},$$

где $\bar{z}$ следует выразить через $t, \tilde{y}$, используя обратную замену переменных. Функции $p_1, \ldots,$ p_N, которые определяют накрытие из этой системы в систему (11.20), по аналогии с (11.19) есть функции

$$\chi_1(t_{\text{K}},\ \bar{z}), \quad \frac{\partial \chi_1}{\partial t}(t_{\text{K}},\ \bar{z}),\ \ldots, \quad \frac{\partial^{k_1}\chi_1}{\partial t^{k_1}}(t_{\text{K}},\ \bar{z}), \quad \chi_2(t_{\text{K}},\ \bar{z}),\ \ldots, \quad \frac{\partial^{k_m}\chi_m}{\partial t^{k_m}}(t_{\text{K}},\ \bar{z}).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В. Дифференциальные уравнения. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006.

[2] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Едиториал УРСС, 2003.— 416 с.

[3] Белинская Ю.С., Четвериков В.Н. Метод накрытий для терминального управления с учетом ограничений // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50. № 12. С. 1629–1639.

[4] Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.

[5] Канатников А.Н., Крищенко А.П., Четвериков В.Н. Дифференциальное исчисление функций многих переменных. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. — 456 с.

[6] Краснощеченко В. И., Крищенко А. П. Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. — М.: Изд–во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. — 520 с.

[7] Крищенко А.П., Четвериков В.Н. Преобразования описаний нелинейных систем // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 5. С. 706-715.

[8] Крищенко А.П., Четвериков В.Н. Минимальные реализации нелинейных систем // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 11. С. 1612–1622.

[9] Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / А.В. Бочаров, А.М. Вербовецкий, А.М. Виноградов, С.В. Дужин, И.С. Красильщик, А.В. Самохин, Ю.Н. Торхов, Н.Г. Хорькова, В.Н. Четвериков; под ред. А.М. Виноградова и И.С. Красильщика. 2 изд., испр. и доп. М. : Факториал, 2005. 474 с.

[10] Четвериков В.Н. Лекции по курсу "Дифференциально-геометрические методы теории управления" для бакалавров ФН-12.

[11] Conte G., Moog C.H., Perdon A.M. Algebraic methods for nonlinear control systems. London, 2007.

[12] Fliess M., Join C. and Sira–Ramrez H. Non-linear estimation is easy // Int. J. Modelling Identification and Control. 2008. Vol. 4(1). P. 12-27

[13] M. Fliess, J. Lévine, Ph. Martin and P. Rouchon. A Lie–Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Control. — 1999. — V. 44, № 5. — P. 922–937.

[14] Isidori A. Nonlinear Control Systems. Berlin: Springer, 1995. 549 p.

[15] Martin P., Murray R.M. and Rouchon P. Flat systems, equivalence and trajectory eneration. CDS Technical Report, CDS 2003. http://www.cds.caltech.edu/ murray/papers/2003d_mmr03-cds.html

[16] Mboup M., Join C. and Fliess M. Numerical differentiation with annihilators in noisy environment // Numerical Algorithms. 2009. Vol. 50(4). P. 439-467.

[17] Mboup M., Join C. and Fliess M. A revised look at numerical differentiation with an application to nonlinear feedback control // Analysis and Design of Hybrid Systems. 2009. Vol. 3(1). P. 409-414

[18] Schenkendorf R. and Mangold M. Parameter Identification for Ordinary and Delay Differential Equations by Using Flat Inputs // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. 2014. Vol. 48(5). P. 594-607.

[19] Sira–Ramirez H., Castro-Linares R. and Liceaga–Castro E. A Liouvillian systems approach for the trajectory planning-based control of helicopter models // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2000. V. 10. Pp. 301-320.

[20] Wald S. and Zeitz M. Flat inputs in the MIMO case // Preprints of the 8th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems, University of Bologna, Italy. September 1-3. 2010. P. 695-700.