

Домашнее задание №2 "Алгебраические системы"
по курсу "Дискретная математика"
для специальности РТ5, 4-й семестр, 2023 г.

Задача 1 (2 балла)

Проверив аксиомы, установить, является ли заданная алгебра с одной бинарной операцией полугруппой? моноидом? группой? Символом \mathbb{O} в условии задачи обозначен нейтральный элемент по сложению алгебры, над которой выполняются операции над элементами матриц или упорядоченных пар.

Вариант 1. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $a, b, c, d \in \{0, 1\}$, с операциями сложения матриц. Операция сложения элементов матриц выполняется в аддитивной группе \mathbf{Z}_2^\oplus вычетов по модулю 2.

Вариант 2. Множество упорядоченных пар (x, y) , где $x, y \in \{0, 1\}$, с операцией умножения упорядоченных пар, определенных по следующим правилам:

$$(a, b) \odot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d).$$

Операция умножения элементов упорядоченных пар выполняется в мультипликативном моноиде \mathbf{Z}_2 вычетов по модулю 2.

Вариант 3. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $a, b, c, d \in \{0, 1, 2\}$, с операцией сложения матриц. Операция сложения элементов матриц выполняется в аддитивной группе \mathbf{Z}_3^\oplus вычетов по модулю 3.

Вариант 4. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $a, b, c \in 2^{\{0,1\}}$, с операцией сложения матриц. Операции сложения элементов матриц выполняются в моноиде $(2^{\{0,1\}}, \cup)$.

Вариант 5. Множество упорядоченных пар (x, y) , где $x, y \in \{0, 1, 2\}$, с операцией сложения упорядоченных пар, определенной по следующим правилам:

$$(a, b) + (c, d) = (a \oplus c, b \oplus d).$$

Операция сложения элементов упорядоченных пар выполняется в аддитивной группе \mathbf{Z}_3^\oplus вычетов по модулю 3.

Вариант 6. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & b \end{pmatrix}$, где $a, b \in 2^{\{0,1\}}$, с операцией сложения матриц. Операции сложения элементов матриц выполняются в группе $(2^{\{0,1\}}, \Delta)$.

Вариант 7. Множество упорядоченных пар (x, y) , где $x, y \in \{0, 1\}$, с операцией сложения упорядоченных пар, определенной по следующим правилам:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d).$$

Операции сложения элементов упорядоченных пар выполняется в моноиде $(\{0, 1\}, \vee)$.

Вариант 8. Множество упорядоченных пар (x, y) , где $x, y \in 2^{\{0,1\}}$, с операцией умножения упорядоченных пар, определенной по следующим правилам:

$$(a, b) \odot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d).$$

Операция умножения элементов упорядоченных пар выполняется в моноиде $(2^{\{0,1\}}, \cap)$.

Задача 1 (2 балла)

Проверив аксиомы, установить, является ли заданная алгебра с одной бинарной операцией полугруппой? Моноидом? Группой? Символом \mathbb{O} в условии задачи обозначен нейтральный элемент по сложению алгебры, над которой выполняются операции над элементами матриц или упорядоченных пар.

Вариант 9. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & b \end{pmatrix}$, где $a, b \in 2^{\{0,1\}}$, с операций сложения матриц. Операции сложения элементов матриц выполняются в моноиде $(2^{\{0,1\}}, \cup)$.

Вариант 10. Множество упорядоченных пар (x, y) , где $x, y \in 2^M$ (M — некоторое множество), с операцией сложения упорядоченных пар, определенной по следующим правилам:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d).$$

Операция сложения элементов упорядоченных пар выполняется в группе $(2^M, \Delta)$.

Вариант 11. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & b \end{pmatrix}$, где $a, b \in \{0, 1\}$, с операцией сложения матриц. Операция сложения элементов матриц выполняется в моноиде $(\{0, 1\}, \vee)$.

Вариант 12. Множество чисел вида $x + \sqrt{2}y$, где x и y — рациональные числа, с операцией сложения чисел, определенной по следующему правилу

$$(x_1 + \sqrt{2}y_1) + (x_2 + \sqrt{2}y_2) = (x_1 + x_2) + \sqrt{2}(y_1 + y_2).$$

Операции сложения выполняются в аддитивной группе рациональных чисел.

Вариант 13. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ \mathbb{O} & c \end{pmatrix}$, где $a, b, c \in \{0, 1\}$ с операцией сложения матриц. Операция сложения элементов матриц выполняется в моноиде $(\{0, 1\}, \min)$.

Вариант 14. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & \mathbb{O} \\ b & c \end{pmatrix}$, где $a, b, c \in 2^{\{0,1\}}$, с операцией сложения матриц. Операция сложения элементов матриц выполняется в моноиде $(2^{\{0,1\}}, \cap)$.

Вариант 15. Множество чисел вида $x + \sqrt{3}y$, где x и y — рациональные числа, с операцией сложения чисел, определенной по следующему правилу

$$(x_1 + \sqrt{3}y_1) + (x_2 + \sqrt{3}y_2) = (x_1 + x_2) + \sqrt{3}(y_1 + y_2).$$

Операция сложения выполняется в аддитивной группе рациональных чисел.

Вариант 16. Множество упорядоченных пар (x, y) , где $x, y \in \{0, 1\}$, с операцией сложения, определенной по следующим правилам:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d).$$

Операция сложения элементов упорядоченных пар выполняется в моноиде $(\{0, 1\}, \max)$.

Задача 1 (2 балла)

Проверив аксиомы, установить, является ли заданная алгебра с одной бинарной операцией полугруппой? Моноидом? Группой? Символом \mathbb{O} в условии задачи обозначен нейтральный элемент по сложению алгебры, над которой выполняются операции над элементами матриц или упорядоченных пар.

Вариант 17. Множество упорядоченных пар (x, y) , где $x, y \in \{0, 1, 2, 3\}$, с операцией умножения упорядоченных пар, определенной по следующим правилам:

$$(a, b) \odot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d).$$

Операция умножения элементов упорядоченных пар выполняется в мультипликативном моноиде \mathbf{Z}_4 вычетов по модулю 4.

Вариант 18. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $a, b, c, d \in \{0, 1, 2, 3\}$, с операцией сложения матриц. Операция сложения элементов матриц выполняется в аддитивной группе кольца \mathbf{Z}_4 вычетов по модулю 4.

Вариант 19. Множество упорядоченных пар (x, y) , где $x, y \in \{0, 1, 2\}$, с операцией сложения, определенной по следующим правилам:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d).$$

Операции сложения элементов упорядоченных пар выполняются в аддитивном моноиде $(\{0, 1, 2\}, \max)$.

Вариант 20. Множество многочленов степени не выше n , коэффициенты которых — действительные числа, с операцией сложения многочленов, определенной по следующим правилам:

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i \oplus \sum_{i=0}^n b_i x^i = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) x^i.$$

Операция сложения действительных чисел выполняется в аддитивной группе действительных чисел.

Вариант 21. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $a, b, c \in 2^{\{0,1,2,3\}}$, с операцией сложения матриц. Операция сложения элементов матриц выполняется в моноиде $(2^{\{0,1,2,3\}}, \cup)$.

Вариант 22. Множество упорядоченных пар (x, y) , где $x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, с операцией умножения упорядоченных пар, определенной по следующим правилам:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (a \odot c, b \odot d).$$

Операция умножения элементов упорядоченных пар выполняется в мультипликативном моноиде \mathbf{Z}_5 вычетов по модулю 5.

Вариант 23. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & b \end{pmatrix}$, где $a, b \in 2^{\{0,1,2\}}$, с операцией сложения матриц. Операция сложения элементов выполняется в группе $(2^{\{0,1,2\}}, \Delta)$.

Вариант 24. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & b \end{pmatrix}$, где $a, b \in \{0, 1\}$, с операцией сложения матриц. Операции сложения элементов матриц выполняется в моноиде $(\{0, 1\}, \min)$.

Задача 1 (2 балла)

Проверив аксиомы, установить, является ли заданная алгебра с одной бинарной операцией полугруппой? Моноидом? Группой? Символом \mathbb{O} в условии задачи обозначен нейтральный элемент по сложению алгебры, над которой выполняются операции над элементами матриц или упорядоченных пар.

Вариант 25. Множество чисел вида $x + \sqrt{5}y$, где x и y — рациональные числа, с операцией сложения чисел, определенной по следующему правилу

$$(x_1 + \sqrt{5}y_1) + (x_2 + \sqrt{5}y_2) = (x_1 + x_2) + \sqrt{5}(y_1 + y_2).$$

Операция сложения выполняется в аддитивной группе поля рациональных чисел.

Вариант 26. Множество упорядоченных пар (x, y) , где $x, y \in \{0, 1\}$, с операцией умножения упорядоченных пар, определенной по следующим правилам:

$$(a, b) \odot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d).$$

Операция умножения элементов упорядоченных пар выполняется в моноиде $(\{0, 1\}; \wedge)$.

Вариант 27. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & \mathbb{O} \\ b & c \end{pmatrix}$, где $a, b, c \in 2^{\{0,1,2\}}$, с операциями сложения матриц. Операция сложения элементов матриц выполняется в моноиде $(2^{\{0,1,2\}}, \cap)$.

Вариант 28. Множество многочленов степени не выше n , коэффициенты которых — рациональные числа, с операцией сложения многочленов, определенной по следующим правилам:

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i \oplus \sum_{i=0}^n b_i x^i = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) x^i.$$

Операция сложения рациональных чисел выполняется в аддитивной группе рациональных чисел.

Вариант 29. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, где $a, b \in 2^{\{0,1\}}$, с операциями сложения матриц. Операции сложения и умножения элементов матриц выполняются в моноиде $(2^{\{0,1\}}, \cap)$.

Вариант 30. Множество многочленов степени не выше n , коэффициенты которых — целые числа, с операцией сложения многочленов, определенной по следующим правилам:

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i \oplus \sum_{i=0}^n b_i x^i = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) x^i.$$

Операция сложения целых чисел выполняется в аддитивной группе целых чисел.

Задача 2 (2 балла)

Проверив аксиомы, установить, является ли заданная алгебра с двумя бинарными операциями полукольцом или кольцом. При этом:

а) Для полукольца (не являющегося кольцом), проверить, является ли полукольцо коммутативным? Идемпотентным? Замкнутым?

б) Для кольца проверить, есть ли в нем делители нуля? является ли кольцо полем?

При решении задачи № 2 использовать результаты, полученные при решении задачи № 1 домашнего задания.

Символом \mathbb{O} в условии задачи обозначен нейтральный элемент по сложению алгебры, над которой выполняются операции над элементами матриц или упорядоченных пар.

Вариант 1. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $a, b, c, d \in \{0, 1\}$, с операциями сложения и умножения матриц. Операции сложения и умножения элементов матриц выполняются в поле \mathbf{Z}_2 вычетов по модулю 2.

Вариант 2. Множество упорядоченных пар (x, y) , где $x, y \in \{0, 1\}$, с операциями сложения и умножения упорядоченных пар, определенных по следующим правилам:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d); \quad (a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d).$$

Операции сложения и умножения элементов упорядоченных пар выполняются в поле \mathbf{Z}_2 вычетов по модулю 2.

Вариант 3. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $a, b, c, d \in \{0, 1, 2\}$, с операциями сложения и умножения матриц. Операции сложения и умножения элементов матриц выполняются в поле \mathbf{Z}_3 вычетов по модулю 3.

Вариант 4. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $a, b, c \in 2^{\{0,1\}}$, с операциями сложения и умножения матриц. Операции сложения и умножения элементов матриц выполняются в полукольце $(2^{\{0,1\}}, \cup, \cap)$.

Вариант 5. Множество упорядоченных пар (x, y) , где $x, y \in \{0, 1, 2\}$, с операциями сложения и умножения упорядоченных пар, определенных по следующим правилам:

$$(a, b) + (c, d) = (a \oplus c, b \oplus d); \quad (a, b) \cdot (c, d) = (a \odot c, b \odot d).$$

Операции сложения и умножения элементов выполняются в поле \mathbf{Z}_3 вычетов по модулю 3.

Вариант 6. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & b \end{pmatrix}$, где $a, b \in 2^{\{0,1\}}$, с операциями сложения и умножения матриц. Операции сложения и умножения элементов матриц выполняются в кольце $(2^{\{0,1\}}, \Delta, \cap)$.

Вариант 7. Множество упорядоченных пар (x, y) , где $x, y \in \{0, 1\}$, с операциями сложения и умножения упорядоченных пар, определенных по следующим правилам:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d); \quad (a, b) \odot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d).$$

Операции сложения и умножения элементов упорядоченных пар выполняются в полукольце \mathcal{B} .

Вариант 8. Множество упорядоченных пар (x, y) , где $x, y \in 2^{\{0,1\}}$, с операциями сложения и умножения упорядоченных пар, определенных по следующим правилам:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d); \quad (a, b) \odot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d).$$

Операции сложения и умножения элементов упорядоченных пар выполняются в полукольце $(2^{\{0,1\}}, \cup, \cap)$.

Задача 2 (2 балла)

Проверив аксиомы, установить, является ли заданная алгебра с двумя бинарными операциями полукольцом или кольцом. При этом:

а) Для полукольца (не являющегося кольцом), проверить, является ли полукольцо коммутативным? Идемпотентным? Замкнутым?

б) Для кольца проверить, есть ли в нем делители нуля? является ли кольцо полем?

При решении задачи № 2 использовать результаты, полученные при решении задачи № 1 домашнего задания.

Символом \mathbb{O} в условии задачи обозначен нейтральный элемент по сложению алгебры, над которой выполняются операции над элементами матриц или упорядоченных пар.

Вариант 9. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & b \end{pmatrix}$, где $a, b \in 2^{\{0,1\}}$, с операциями сложения и умножения матриц. Операции сложения и умножения элементов матриц выполняются в полукольце $(2^{\{0,1\}}, \cup, \cap)$.

Вариант 10. Множество упорядоченных пар (x, y) , где $x, y \in 2^M$ (M — некоторое множество), с операциями сложения и умножения упорядоченных пар, определенных по следующим правилам:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d); \quad (a, b) \odot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d).$$

Операции сложения и умножения элементов упорядоченных пар выполняются в кольце $(2^M, \Delta, \cap)$.

Вариант 11. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & b \end{pmatrix}$, где $a, b \in \{0, 1\}$, с операциями сложения и умножения матриц. Операции сложения и умножения элементов матриц выполняются в полукольце \mathcal{B} .

Вариант 12. Множество чисел вида $x + \sqrt{2}y$, где x и y — рациональные числа, с операциями сложения и умножения чисел, определенным по следующим правилам

$$(x_1 + \sqrt{2}y_1) + (x_2 + \sqrt{2}y_2) = (x_1 + x_2) + \sqrt{2}(y_1 + y_2),$$

$$(x_1 + \sqrt{2}y_1) \cdot (x_2 + \sqrt{2}y_2) = (x_1x_2 + 2y_1y_2) + \sqrt{2}(x_1y_2 + y_1x_2).$$

Операции сложения и умножения рациональных чисел выполняются в поле рациональных чисел.

Вариант 13. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ \mathbb{O} & c \end{pmatrix}$, где $a, b, c \in \{0, 1\}$ с операциями сложения и умножения матриц. Операции сложения и умножения элементов матриц выполняются в полукольце $(\{0, 1\}, \min, \max)$.

Вариант 14. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & \mathbb{O} \\ b & c \end{pmatrix}$, где $a, b, c \in 2^{\{0,1\}}$, с операциями сложения и умножения матриц. Операции сложения и умножения элементов матриц выполняются в полукольце $(2^{\{0,1\}}, \cap, \cup)$.

Вариант 15. Множество чисел вида $x + \sqrt{3}y$, где x и y — рациональные числа, с операциями сложения и умножения чисел, определенным по следующим правилам

$$(x_1 + \sqrt{3}y_1) + (x_2 + \sqrt{3}y_2) = (x_1 + x_2) + \sqrt{3}(y_1 + y_2),$$

$$(x_1 + \sqrt{3}y_1) \cdot (x_2 + \sqrt{3}y_2) = (x_1x_2 + 3y_1y_2) + \sqrt{3}(x_1y_2 + y_1x_2).$$

Операции сложения и умножения рациональных чисел выполняются в поле рациональных чисел.

Задача 2 (2 балла)

Проверив аксиомы, установить, является ли заданная алгебра с двумя бинарными операциями полукольцом или кольцом. При этом:

а) Для полукольца (не являющегося кольцом), проверить, является ли полукольцо коммутативным? Идемпотентным? Замкнутым?

б) Для кольца проверить, есть ли в нем делители нуля? является ли кольцо полем?

При решении задачи № 2 использовать результаты, полученные при решении задачи № 1 домашнего задания.

Символом \odot в условии задачи обозначен нейтральный элемент по сложению алгебры, над которой выполняются операции над элементами матриц или упорядоченных пар.

Вариант 16. Множество упорядоченных пар (x, y) , где $x, y \in \{0, 1\}$, с операциями сложения и умножения, определенных по следующим правилам:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d); \quad (a, b) \odot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d).$$

Операции сложения и умножения элементов упорядоченных пар выполняются в полукольце $(\{0, 1\}, \max, \min)$.

Вариант 17. Множество упорядоченных пар (x, y) , где $x, y \in \{0, 1, 2, 3\}$, с операциями сложения и умножения упорядоченных пар, определенных по следующим правилам:

$$(a, b) + (c, d) = (a \oplus c, b \oplus d); \quad (a, b) \cdot (c, d) = (a \odot c, b \odot d).$$

Операции сложения и умножения элементов упорядоченных пар выполняются в кольце \mathbf{Z}_4 вычетов по модулю 4.

Вариант 18. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $a, b, c, d \in \{0, 1, 2, 3\}$, с операциями сложения и умножения матриц, причем операции сложения и умножения элементов матриц выполняются в кольце \mathbf{Z}_4 вычетов по модулю 4.

Вариант 19. Множество упорядоченных пар (x, y) , где $x, y \in \{0, 1, 2\}$, с операциями сложения и умножения, определенных по следующим правилам:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d); \quad (a, b) \odot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d).$$

Операции сложения и умножения элементов упорядоченных пар выполняются в полукольце $(\{0, 1, 2\}, \max, \min)$.

Вариант 20. Множество многочленов степени не выше n над полем действительных чисел с операциями сложения и умножения многочленов, определенных по следующим правилам:

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i \oplus \sum_{i=0}^n b_i x^i = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) x^i, \quad \sum_{i=0}^n a_i x^i \odot \sum_{i=0}^n b_i x^i = \sum_{i=0}^n (a_i \cdot b_i) x^i.$$

Операции сложения и умножения действительных чисел выполняются в поле действительных чисел.

Вариант 21. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $a, b, c \in 2^{\{0,1,2,3\}}$, с операциями сложения и умножения матриц. Операции сложения и умножения элементов матриц выполняются в полукольце $(2^{\{0,1,2,3\}}, \cup, \cap)$.

Задача 2 (2 балла)

Проверив аксиомы, установить, является ли заданная алгебра с двумя бинарными операциями полукольцом или кольцом. При этом:

а) Для полукольца (не являющегося кольцом), проверить, является ли полукольцо коммутативным? Идемпотентным? Замкнутым?

б) Для кольца проверить, есть ли в нем делители нуля? является ли кольцо полем?

При решении задачи № 2 использовать результаты, полученные при решении задачи № 1 домашнего задания.

Символом \oplus в условии задачи обозначен нейтральный элемент по сложению алгебры, над которой выполняются операции над элементами матриц или упорядоченных пар.

Вариант 22. Множество упорядоченных пар (x, y) , где $x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, с операциями сложения и умножения упорядоченных пар, определенных по следующим правилам:

$$(a, b) + (c, d) = (a \oplus c, b \oplus d); \quad (a, b) \cdot (c, d) = (a \odot c, b \odot d).$$

Операции сложения и умножения элементов выполняются в поле \mathbf{Z}_5 вычетов по модулю 5.

Вариант 23. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & \oplus \\ \oplus & b \end{pmatrix}$, где $a, b \in 2^{\{0,1,2\}}$, с операциями сложения и умножения матриц. Операции сложения и умножения элементов матриц выполняются в кольце $(2^{\{0,1,2\}}, \Delta, \cap)$.

Вариант 24. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & \oplus \\ \oplus & b \end{pmatrix}$, где $a, b \in \{0, 1\}$, с операциями сложения и умножения матриц. Операции сложения и умножения элементов матриц выполняются в полукольце $(\{0, 1\}, \min, \max)$.

Вариант 25. Множество чисел вида $x + \sqrt{5}y$, где x и y — рациональные числа, с операциями сложения и умножения чисел, определенным по следующим правилам

$$(x_1 + \sqrt{5}y_1) + (x_2 + \sqrt{5}y_2) = (x_1 + x_2) + \sqrt{5}(y_1 + y_2),$$

$$(x_1 + \sqrt{5}y_1) \cdot (x_2 + \sqrt{5}y_2) = (x_1x_2 + 3y_1y_2) + \sqrt{5}(x_1y_2 + y_1x_2).$$

Операции сложения и умножения рациональных чисел выполняются в поле рациональных чисел.

Вариант 26. Множество упорядоченных пар (x, y) , где $x, y \in \{0, 1\}$, с операциями сложения и умножения упорядоченных пар, определенных по следующим правилам:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d); \quad (a, b) \odot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d).$$

Операции сложения и умножения элементов упорядоченных пар выполняются в полукольце \mathcal{B} .

Вариант 27. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & \oplus \\ b & c \end{pmatrix}$, где $a, b, c \in 2^{\{0,1,2\}}$, с операциями сложения и умножения матриц. Операции сложения и умножения элементов матриц выполняются в полукольце $(2^{\{0,1,2\}}, \cap, \cup)$.

Вариант 28. Множество многочленов степени не выше n над полем рациональных чисел с операциями сложения и умножения многочленов, определенных по следующим правилам:

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i \oplus \sum_{i=0}^n b_i x^i = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) x^i, \quad \sum_{i=0}^n a_i x^i \odot \sum_{i=0}^n b_i x^i = \sum_{i=0}^n (a_i \cdot b_i) x^i.$$

Операция сложения и умножения рациональных чисел выполняется в поле рациональных чисел.

Задача 2 (2 балла)

Проверив аксиомы, установить, является ли заданная алгебра с двумя бинарными операциями полукольцом или кольцом. При этом:

а) Для полукольца (не являющегося кольцом), проверить, является ли полукольцо коммутативным? Идемпотентным? Замкнутым?

б) Для кольца проверить, есть ли в нем делители нуля? является ли кольцо полем?

При решении задачи № 2 использовать результаты, полученные при решении задачи № 1 домашнего задания.

Символом \mathbb{O} в условии задачи обозначен нейтральный элемент по сложению алгебры, над которой выполняются операции над элементами матриц или упорядоченных пар.

Вариант 29. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & b \end{pmatrix}$, где $a, b \in 2^{\{0,1\}}$, с операциями сложения и умножения матриц. Операции сложения и умножения выполняются в полукольце $(2^{\{0,1\}}, \cap, \cup)$.

Вариант 30. Множество многочленов степени не выше n над полем чисел вида $a + \sqrt{2}b$, где a, b — рациональные числа, с операциями сложения и умножения многочленов, определенных по следующим правилам:

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i \oplus \sum_{i=0}^n b_i x^i = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) x^i, \quad \sum_{i=0}^n a_i x^i \odot \sum_{i=0}^n b_i x^i = \sum_{i=0}^n (a_i \cdot b_i) x^i.$$

Операция сложения и умножения чисел выполняется в соответствующем поле.