

Домашнее задание №1 «Множества и булевы функции»
по курсу «Дискретная математика»
для специальности РТ5, 4-й семестр, 2023 г.

№	1	2	3	4	min
Баллы	2	2	2	2	6

ЗАДАЧА 1

Докажите теоретико-множественное тождество с помощью:

- а) диаграмм Эйлера-Венна;
- б) метода эквивалентных преобразований;
- в) метода характеристических функций.

№ вар.	Тождество	№ вар.	Тождество
1	$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$	16	$(A \cup (A \Delta B) \cup (A \Delta C)) \setminus ((B \cup C) \cap \bar{A}) = A$
2	$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$	17	$(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = (A \Delta (B \cup C)) \setminus (B \cup C)$
3	$(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$	18	$(A \cap B \cap \bar{C}) \Delta (A \cap B \cap C) = A \cap B$
4	$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$	19	$(A \setminus B) \Delta (A \setminus C) = (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap \bar{C} \cap B)$
5	$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$	20	$(A \cup B) \Delta (A \cup C) = \bar{A} \cap ((B \cap \bar{C}) \cup (\bar{B} \cap C))$
6	$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$	21	$(A \Delta B) \setminus (A \cup C) = B \cap \bar{A} \cap \bar{C}$
7	$A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{C})$	22	$(A \cup B) \Delta (A \cap B) = A \Delta B$
8	$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$	23	$(A \setminus B) \Delta (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (B \cap C)$
9	$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$	24	$((A \setminus B) \setminus C) \Delta (B \cup C) = (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (B \cup C)$
10	$(A \cap B) \setminus (A \cap C) = (\bar{A} \Delta \bar{B} \setminus C) \cap A$	25	$((A \Delta B) \cup (A \Delta C)) \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$
11	$A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$	26	$(A \Delta B) \cap (B \Delta C) = (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C})$
12	$(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$	27	$(A \cup B) \Delta (A \setminus B) = B$
13	$((A \cap B) \Delta A) \setminus A \cup (C \Delta B) = (C \cup B) \setminus (C \cap B)$	28	$(A \setminus B) \Delta (A \cap B) = A$
14	$(A \cap B \cap C) \Delta (A \cup B) = ((A \cup B) \setminus C) \cup (A \Delta B)$	29	$(A \Delta B) \Delta (B \Delta C) = A \Delta C$
15	$(A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup (B \cap C) = C$	30	$A \cup B = (A \Delta B) \cup (A \cap B)$

ЗАДАЧА 2

Для заданных на множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ бинарных отношений ρ и τ :

- а) запишите их матрицы и постройте графики;
- б) матричным методом найдите композицию $\rho \circ \tau$ и постройте её график;
- в) исследуйте свойства отношений ρ , τ и $\rho \circ \tau$ (рефлексивность, иррефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность).

Вариант	ρ	τ
1	$\{(x, y) : (x + y) \neq 0 \pmod{2}\}$	$\{(x, y) : -1 \leq x - y < 0\}$
2	$\{(x, y) : (x - y) = 0 \pmod{2}\}$	$\{(x, y) : 2 \leq x \leq y - 1\}$
3	$\{(x, y) : (2x + 2y) \neq 0 \pmod{3}\}$	$\{(x, y) : 2x - 1 < y\}$
4	$\{(x, y) : xy \leq 8\}$	$\{(x, y) : x - y \leq 1\}$
5	$\{(x, y) : x(6 - y) \leq 8\}$	$\{(x, y) : x - y > 2\}$
6	$\{(x, y) : x(3 - y) \leq 3\}$	$\{(x, y) : x = 0 \pmod{y}\}$
7	$\{(x, y) : (3 - x)(3 - y) \leq 1\}$	$\{(x, y) : x + y < 5\}$
8	$\{(x, y) : (x - 2)(y - 2) \leq 1\}$	$\{(x, y) : 2x \geq 3y\}$
9	$\{(x, y) : 5 \leq x + y \leq 8\}$	$\{(x, y) : 4 \leq xy \leq 6\}$
10	$\{(x, y) : x - y < 2\}$	$\{(x, y) : 2 < x + y \leq 5\}$
11	$\{(x, y) : 2 \leq x - 2y \leq 4\}$	$\{(x, y) : (x + y + 1) = 0 \pmod{2}\}$
12	$\{(x, y) : (7x - 2y) \neq 0 \pmod{4}\}$	$\{(x, y) : x - y \geq 2\}$
13	$\{(x, y) : (4 - x)(2 - y) \leq 1\}$	$\{(x, y) : 1 \leq (x - 2)y < 8\}$
14	$\{(x, y) : x \geq y + 1\}$	$\{(x, y) : (4 - x)(4 - y) \leq 1\}$
15	$\{(x, y) : y > x + 1\}$	$\{(x, y) : x - y \leq 1\}$
16	$\{(x, y) : (x + y) \neq 0 \pmod{2}\}$	$\{(x, y) : 6 \leq xy \leq 12\}$
17	$\{(x, y) : (x + y) = 0 \pmod{2}\}$	$\{(x, y) : 2 \leq y \leq x - 1\}$
18	$\{(x, y) : x - y < 0\}$	$\{(x, y) : 4 \leq xy \leq 9\}$
19	$\{(x, y) : x - y \leq 1\}$	$\{(x, y) : x(y - 2) \leq 3, x \neq y\}$
20	$\{(x, y) : x - y \geq 2\}$	$\{(x, y) : x(6 - y) \leq 8, x \neq y\}$
21	$\{(x, y) : y = 0 \pmod{x}\}$	$\{(x, y) : (5 - x)(5 - y) \leq 5\}$
22	$\{(x, y) : x + y \leq 7\}$	$\{(x, y) : (x - 3)(5 - y) \leq 1\}$
23	$\{(x, y) : 3x \leq 2y\}$	$\{(x, y) : 1 \leq (2 - x)(2 - y) \leq 3\}$
24	$\{(x, y) : 2 \leq xy \leq 5\}$	$\{(x, y) : 2 \leq x \leq y^2 - 3\}$
25	$\{(x, y) : 3 < x + y < 6\}$	$\{(x, y) : x - y^2 \leq 2\}$
26	$\{(x, y) : (x + y + 2) = 0 \pmod{3}\}$	$\{(x, y) : 3 \leq x^2 - y \leq 5\}$
27	$\{(x, y) : (x - y + 1) = 0 \pmod{3}\}$	$\{(x, y) : 0 \leq x^2 - xy \leq 9\}$
28	$\{(x, y) : 0 \leq xy \leq 8\}$	$\{(x, y) : (5 - x)(y^2 - 3) \geq 14\}$
29	$\{(x, y) : 0 \leq (2 - x)(2 - y) \leq 9\}$	$\{(x, y) : 1,5x - y \leq 0\}$
30	$\{(x, y) : 2 \leq (x - 1)(y - 1) \leq 6\}$	$\{(x, y) : 0,5y - x \leq -3\}$

ЗАДАЧА 3

Для заданной булевой функции f :

- а) с помощью карты Карно найдите сокращённую ДНФ и ядро функции;
- б) найдите все тупиковые ДНФ и укажите, какие из них являются кратчайшими и какие минимальными;
- в) для всех минимальных ДНФ изобразите на картах Карно соответствующие покрытия склейками.

Вариант	Булева функция f	Вариант	Булева функция f
1	$f = (1111\ 0100\ 1011\ 0101)$	16	$f = (1111\ 1001\ 1010\ 1011)$
2	$f = (1111\ 0010\ 1110\ 0111)$	17	$f = (1010\ 1100\ 0011\ 0111)$
3	$f = (0011\ 0101\ 1110\ 1100)$	18	$f = (1011\ 1001\ 1110\ 1111)$
4	$f = (1111\ 1100\ 1110\ 0111)$	19	$f = (1110\ 0101\ 1010\ 0011)$
5	$f = (1011\ 0101\ 1010\ 1100)$	20	$f = (0000\ 0111\ 1111\ 1110)$
6	$f = (1100\ 1101\ 1101\ 1001)$	21	$f = (1101\ 1011\ 0010\ 1110)$
7	$f = (0111\ 0110\ 1101\ 0011)$	22	$f = (1110\ 0101\ 1111\ 0001)$
8	$f = (1010\ 0111\ 1010\ 1110)$	23	$f = (1011\ 1101\ 1111\ 1000)$
9	$f = (1010\ 1110\ 1111\ 0110)$	24	$f = (1011\ 0011\ 1100\ 0101)$
10	$f = (1100\ 1101\ 1010\ 0011)$	25	$f = (1011\ 1101\ 1111\ 0011)$
11	$f = (1011\ 1111\ 1110\ 0110)$	26	$f = (1010\ 0011\ 1110\ 0101)$
12	$f = (1010\ 1100\ 1011\ 0101)$	27	$f = (0111\ 0110\ 0011\ 0111)$
13	$f = (1111\ 1011\ 0000\ 1101)$	28	$f = (0111\ 1100\ 1101\ 1101)$
14	$f = (1000\ 1011\ 0111\ 1110)$	29	$f = (1111\ 1000\ 0111\ 1100)$
15	$f = (1010\ 1011\ 1010\ 1101)$	30	$f = (1111\ 1000\ 1101\ 1011)$

ЗАДАЧА 4

Для заданных булевых функций f и w :

- а) найдите таблицу значений функции f , а также минимальные ДНФ для f и w ;
- б) выясните полноту системы $\{f, w\}$ и, если система неполна, дополните её функцией g от трёх переменных до полной системы, при этом нельзя дополнять функцией, образующей с f или w полную подсистему, кроме случаев, когда иное невозможно;
- в) реализуйте базовые функции $0, 1, \neg, \wedge, \vee$ формулами над $\{f, w\}$ или $\{f, w, g\}$, при этом для реализации конъюнкции \wedge используйте полином Жегалкина нелинейной функции.

Вариант	Булева функция $f(x_1, x_2, x_3)$	Булева функция w
1	$(x_2 x_2 \vee x_3)(x_2 \downarrow \bar{x}_3) \vee (x_1 \oplus x_3)$	(0010 1001)
2	$\left((\bar{x}_1 \Rightarrow (\bar{x}_3 \Rightarrow x_1)) \downarrow (x_2 x_3) \right) \vee (\bar{x}_1 \downarrow x_3)$	(1001 0111)
3	$\left((x_3 \Rightarrow (x_1 \sim x_2)) \oplus (\bar{x}_3 \Rightarrow \bar{x}_1) \right) \Rightarrow (\bar{x}_2 \bar{x}_3)$	(0110 0101)
4	$(x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \Rightarrow (x_1 \oplus x_3)$	(0101 0100)
5	$(x_1(x_1 \oplus \bar{x}_3) \Rightarrow (x_1 \sim \bar{x}_2)) (x_1 \downarrow \bar{x}_2)$	(1010 1110)
6	$\left((x_3 \Rightarrow (x_2 \sim \bar{x}_3)) \vee (x_1 \oplus \bar{x}_2) \right) \oplus x_1 x_2$	(1101 0100)
7	$(\bar{x}_1 \vee (\bar{x}_1 \oplus x_2) \vee x_2 \bar{x}_3) (\bar{x}_1 \sim \bar{x}_3)$	(1011 0010)
8	$\overline{((\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \Rightarrow x_3)} \Rightarrow \overline{\bar{x}_1 \sim \bar{x}_2} \downarrow (x_1 \sim x_3)$	(1001 0110)
9	$(x_1 \oplus x_3 \oplus (x_2 x_2 x_3)) (\bar{x}_1 \downarrow \bar{x}_3)$	(0100 1101)
10	$\left((x_1 \vee (x_2 \Rightarrow x_3)) \Rightarrow x_1 x_2 \right) \vee (\bar{x}_1 \Rightarrow \bar{x}_3)$	(1110 1100)
11	$\left((x_2 \Rightarrow (x_1 \oplus x_3)) \oplus (\bar{x}_2 \sim x_3) \right) \Rightarrow (\bar{x}_2 \bar{x}_3)$	(1101 0111)
12	$\bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \left((\bar{x}_3 \oplus (x_2 \Rightarrow x_1)) \Rightarrow (\bar{x}_1 \sim x_2) \right)$	(0011 0111)
13	$\left((\bar{x}_1 \Rightarrow (\bar{x}_2 \sim x_3)) \oplus (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \right) \vee (x_1 \oplus \bar{x}_2)$	(0101 1101)
14	$(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee (\bar{x}_3 \Rightarrow \bar{x}_1)) \sim \overline{x_2 \downarrow x_3}$	(1001 0110)
15	$(\bar{x}_2 \vee x_2 \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \oplus x_3) \oplus (\bar{x}_2 \Rightarrow \bar{x}_3)$	(1101 1101)
16	$\overline{(\bar{x}_2 \vee (\bar{x}_3 \Rightarrow \bar{x}_2))} \downarrow (x_1 \vee \bar{x}_3) \Rightarrow (x_2 \sim x_3)$	(0000 0111)
17	$\left(((\bar{x}_1 \vee x_2) \sim x_3) \sim (x_2 \sim x_3) \right) \Rightarrow (\bar{x}_1 \vee x_3)$	(1111 0000)
18	$(x_1 \oplus (x_1 \vee \bar{x}_3))(x_2 \oplus \bar{x}_3) \sim \bar{x}_1 \bar{x}_3$	(1101 1101)
19	$\left((\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \Rightarrow (\bar{x}_2 \sim x_3) \right) \sim (x_1 \sim \bar{x}_3)$	(1111 1100)
20	$\bar{x}_1(x_1 \downarrow \bar{x}_2)(x_1 \oplus \bar{x}_3) \Rightarrow (x_2 \sim x_3)$	(0000 1111)
21	$\left(((\bar{x}_1 x_3) \oplus x_2) \Rightarrow (x_2 \Rightarrow \bar{x}_1) \right) \oplus \bar{x}_2 \oplus \bar{x}_3$	(1100 0011)
22	$(\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_3 \oplus x_3 \oplus (x_1 \sim \bar{x}_2)) (x_1 \downarrow x_3)$	(1011 0101)
23	$(\bar{x}_1(\bar{x}_2 \Rightarrow \bar{x}_1) \sim (x_2 x_3)) \downarrow \overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2}$	(1011 1010)
24	$\left(((x_1 \oplus x_2) \vee x_2) \Rightarrow (\bar{x}_2 x_3) \right) \vee (x_2 \oplus \bar{x}_3)$	(1100 1010)
25	$\left((x_1 \bar{x}_3) \oplus (x_2 x_3 \vee \bar{x}_3) \right) \Rightarrow (x_2 \sim x_3)$	(0110 1001)
26	$\left((\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \oplus (\bar{x}_3 \Rightarrow \bar{x}_1) \right) \sim (\bar{x}_2 \bar{x}_3)$	(1001 0111)
27	$\left((\bar{x}_1 \Rightarrow (x_1 \sim \bar{x}_3)) \sim (\bar{x}_1 \downarrow \bar{x}_2) \right) \vee x_1$	(1110 0110)
28	$\left((x_1 \vee x_1 x_3) \oplus (x_2 \downarrow \bar{x}_3) \right) \Rightarrow (x_2 \sim x_3)$	(0101 0010)
29	$\left((\bar{x}_3 \Rightarrow (x_2 \bar{x}_3))(\bar{x}_1 \sim \bar{x}_3) \right) \sim (x_1 \sim x_2)$	(1010 1010)
30	$x_1(\bar{x}_1 x_3)(\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_3) \Rightarrow (x_2 \sim x_3)$	(1110 0110)